ЛЕВ ГЕНДЕНШТЕЙН

АЛИСА В СТРАНЕ МАТЕМАТИКИ

SHOUT
SHARE
IT

Annotation

Книга построена на занимательных сказочных сюжетах с персонажами всемирно известных сказок Льюиса Кэрролла «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье» и призвана пробудить у детей интерес к математике, развить творческое воображение и логическое мышление. В книге содержатся также исторические экскурсы, знакомящие с великими математиками и историей возникновения и развития математики с древности до наших дней.

-
-
- ВЫДУМКА, В КОТОРОЙ НЕТ ОБМАНА
- ГДЕ И КОГДА ЗАРОДИЛАСЬ МАТЕМАТИКА
- НЕБЫЛИЦА О ФАЛЕСЕ ИЗ МИЛЕТА, ЗНАМЕНИТОМ ДРЕВНЕГРЕЧЕСКОМ МУДРЕЦЕ, КОТОРЫЙ ПЕРВЫМ ПРЕДСКАЗАЛ СОЛНЕЧНОЕ ЗАТМЕНИЕ
- НАСТОЯЩЕЕ И ВООБРАЖАЕМОЕ
- КАК ЛЮДИ УЧИЛИСЬ СЧИТАТЬ
- НЕБЫЛИЦА О ДЕТСКОМ САДЕ, КОТОРЫЙ БЫЛ УЖЕ ТОГДА, КОГДА СЧИТАТЬ ЕЩЕ НЕ УМЕЛИ
- НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД В НАТУРАЛЬНУЮ ВЕЛИЧИНУ
- БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД ЗАГАДОК
- НЕБЫЛИЦА ОБ АРХИМЕДЕ, КОТОРЫЙ ПЕРВЫМ ДОГАДАЛСЯ, ЧТО СЧИТАТЬ МОЖНО БЕЗ КОНЦА
- КАК ДЕЛИТЬ И КАК ДЕЛИТЬСЯ
- КОГДА ЧЕЛОВЕК ПОБЕДИЛ ДРОБИ
- НЕБЫЛИЦА О САДЕ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ, КОТОРЫЙ НАЗЫВАЛСЯ АКАДЕМИЕЙ
- КОРОЛЕВСКАЯ ПРОГУЛКА
- ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ И ВСЕОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ
- НЕБЫЛИЦА О СЛУЧАЕ, КОТОРЫЙ ПОДСКАЗАЛ ДЕКАРТУ ИДЕЮ КООРДИНАТ
- КАКОЙ МОМЕНТ БЫЛ ПОСЛЕДНИМ?
- КАК РЕШАЮТСЯ ЗАДАЧИ БЕЗ РЕШЕНИЙ
- НЕБЫЛИЦА О ПИФАГОРЕ, КОТОРУЮ ТРУДНО ОТЛИЧИТЬ ОТ БЫЛИ
- КАК СЪЕСТЬ ЦЕЛЫЙ ТОРТ?
- О БЕЗГРАНИЧНОЙ ДЕЛИМОСТИ И ЗАГАДКЕ ДВИЖЕНИЯ
- НЕБЫЛИЦА О ТОМ, КАК НЬЮТОН РАЗГАДАЛ ЗАГАДКУ ДВИЖЕНИЯ
- КТО КОГО ВИДИТ В ЗЕРКАЛЕ?

- ЧТО ТАКОЕ СИММЕТРИЯ?
- НЕБЫЛИЦА О ПРИРОДЕ, КОТОРАЯ УЗНАЛА, ЧТО ЕСТЬ РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ЛЕВЫМ И ПРАВЫМ
- ЗА́МОК, КОТОРЫЙ НЕВОЗМОЖНО ОБОЙТИ
- НАУКА, РОДИВШАЯСЯ ИЗ ГОЛОВОЛОМКИ
- НЕБЫЛИЦА ОБ ЭЙЛЕРЕ, КОТОРЫЙ РАЗГАДАЛ ЗАГАДКУ КЁНИГСБЕРГСКИХ МОСТОВ, ГУЛЯЯ ПО ПЕТЕРБУРГСКИМ
- КОРОЛЕВСКАЯ ЛОГИКА
- КАК ЧЕЛОВЕК УЧИЛСЯ РАССУЖДАТЬ
- НЕБЫЛИЦА О ТОМ, КАК ЛЕЙБНИЦ И БУЛЬ ИЗОБРЕЛИ ЯЗЫК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
- СЛИШКОМ СТРАШНАЯ ИСТОРИЯ
- О МНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВ
- НЕБЫЛИЦА О КАНТОРЕ, В КОТОРОЙ ВСЁ — ПРАВДА!
- ШАХМАТНЫЙ БАЛ
- МОЖЕТ ЛИ ЧАСТЬ РАВНЯТЬСЯ ЦЕЛОМУ?
- НЕБЫЛИЦА О ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЕ, ЖИВУЩЕМ В БЕСКОНЕЧНОЙ ВСЕЛЕННОЙ
- Конец
- notes
  - *
  - *
  - *
  - *
  - *

ЛЕВ ГЕНДЕНШТЕЙН
АЛИСА В СТРАНЕ МАТЕМАТИКИ

сказки
были
небылицы

Памяти Григория Марковича Донского

Четвёртого июля 1862 года по реке Чарвел близ Оксфорда, старинного университетского городка в Англии, плыла лодка. Никто из сидевших в ней и не подозревал, что эта лодочная прогулка войдет в историю.

Когда лодка проплывала мимо старой мельницы, тишину знойного дня нарушил звонкий голос:

— Мистер Доджсон, расскажите нам, пожалуйста, сказку!

Этот голос принадлежал Алисе, средней из трёх сестёр,

которых пригласил на прогулку преподаватель математики одного из оксфордских колледжей Чарльз Лютвидж Доджсон.

Мистер Доджсон любил рассказывать сказки, но в тот жаркий день его так клонило в сон, что он попытался отказаться.

— Начинайте! — решительно поддержала Алису старшая сестра Ларина.

— И пусть в вашей сказке будет побольше всяких бессмыслиц, — попросила Алиса.

Младшая, Эдит, промолчала. Зато потом, когда мистер Доджсон всё-таки начал рассказывать, она время от времени перебивала его вопросами — но не чаще одного раза в минуту.

А начал мистер Доджсон с того, как одна девочка (почему-то она была очень похожа на среднюю из сестёр, и звали её тоже Алисой) побежала за кроликом, который на бегу достал часы из жилетного кармана. Кролик нырнул в нору, Алиса бросилась за ним, и оказалось, что нора эта ведет в Страну Чудес, а там начались такие невероятные приключения и даже превращения, что мистер Доджсон и сам стал удивляться тому, о чём рассказывал! С него быстро слетела вся дремота, а о девочках и говорить нечего: блестя глазами, слушали они необыкновенную сказку, где всё было не так...

Сказка, которую рассказал тогда мистер Доджсон, стала одной из самых известных сказок в мире — вот почему эта лодочная прогулка вошла в историю. Правда, на обложке книги «Приключения Алисы в Стране Чудес» написано, что автор её Льюис Кэрролл, но дело в том, что сам Льюис Кэрролл — тоже выдумка мистера Доджсона!

А на обратном пути в лодке произошел разговор, который до сих пор оставался неизвестным.

Как только лодка отошла от берега...

ВЫДУМКА, В КОТОРОЙ НЕТ ОБМАНА

Как только лодка отошла от берега, девочки переглянулись и все вместе посмотрели на мистера Доджсона. Он сразу всё понял.

— Нет-нет! — замотал он головой (и замахал бы руками, если бы они не были заняты веслами). — Ничего больше я уже придумать не смогу. По крайней мере, сегодня.

— Неужели придумывать так трудно? — удивилась Алиса.

— Конечно, — отозвался мистер Доджсон. — Ведь надо всё время следить, чтобы в выдумке *не было обмана*!

— А как же говорящие птицы и звери в вашей сказке? — спросила Лорина. — Разве это не обман?

— Но ведь это же было в Стране Чудес! — воскликнула Алиса.

— А там только такие и водятся, — со знанием дела добавила Эдит.

— Значит, в выдумке вообще не может быть обмана! — заключила Лорина. — В Стране Чудес может быть что угодно...

— Если только это *может быть*, — заметил мистер Доджсон. — Ты можешь представить, например, что в Стране Чудес живет *белый кролик чёрного цвета*?

— Такого кролика не может быть даже в Стране Чудес! — воскликнула Лорина. — Этой выдумке никто не поверит, даже если будет знать, что это выдумка!

— Значит, обман в выдумке всё-таки *может* быть? — спросил мистер Доджсон.

— Да, — признала Лорина. — Это когда выдумка *противоречит* сама себе!

— Ты очень точно сказала, — подтвердил мистер Доджсон. — Точнее не смог бы сказать никто.

— Но разве от противоречий так трудно избавиться? — спросила Алиса. — Они же сразу видны!

— Белого кролика чёрного цвета трудно, конечно, не заметить, — согласился мистер Доджсон. — Но бывают и очень коварные противоречия, особенно когда придумываешь что-то необычное...

— Давайте придумаем необычную историю все вместе, — предложила Алиса. — И будем следить, чтобы в ней не было противоречий!

— Чур я начинаю! — воскликнула Эдит. — Как-то раз один рыцарь шёл по лесу...

— Уже есть противоречие, — перебила Лорина. — Рыцари не ходят, они ездят на конях.

— Может быть, у этого рыцаря заболел конь? — предположил мистер Доджсон.

— Так оно и было, — грустным голосом подтвердила Эдит. — Он заболел свинкой.

— Конь заболел свинкой?! — вскричала Лорина. — Это противоречие: свинкой болеют только дети!

— Так он и был жеребёнок, — пояснила Эдит. — Это же ребёнок! И вот рыцарь пошёл искать врача для своего жеребёнка...

— В лесу? — недоверчиво спросила Лорина.

— Ну да, — кивнула Эдит. — А где, по-твоему, врачи собирают грибы?

— Но зачем? — удивилась Лорина.

— Зачем врачи собирают грибы? — переспросила Эдит.

— Нет, зачем искать в лесу врача, который собирает грибы?

— Почему ты всё время перебиваешь? — начала сердиться Эдит.

— Просто я хочу понять, — сказала Лорина.

— А я не понимаю, что тут можно не понять, — вмешалась Алиса. — Рыцарь ищет в лесу врача, который собирает грибы для своего жеребёнка...

— Грибы для жеребёнка? — спросила Лорина.

— Грибы для врача, а врач — для жеребёнка! — вскричала Эдит, теряя терпение.

— Значит, грибы тоже для жеребёнка, — резонно заметила Лорина.

От возмущения Эдит не могла найти слов, поэтому историю продолжила Алиса.

— Дело в том, — сказала она, — что врач собирал в лесу не просто грибы, а грибы-свинушки. Они называются так потому, что жареные свинушки — лучшее лекарство для жеребят, которые болеют свинкой...

— Хм, — усомнилась Лорина.

— Здесь нет противоречия! — отозвалась Алиса. — Приведи мне жеребёнка, больного свинкой, и я тут же вылечу его жареными свинушками.

— Ладно, — сказала Лорина. — Теперь, по крайней мере, понятно, почему рыцарь искал врача в лесу.

— Вдруг в лесу потемнело... — страшным голосом сказала Алиса.

— Это прилетел дракон, — сразу оживилась Эдит.

— Как ты догадалась? — спросила Алиса уже не таким страшным голосом.

— Когда в лесу темнеет, это обычно из-за того, что прилетает дракон, — объяснила Эдит.

— У дракона было три головы, — продолжала Алиса. — Рыцарь выхватил меч и одним взмахом отрубил дракону голову.

— Так, так, — закивала Эдит. — Когда рыцарь встречает дракона, он первым делом отрубает ему голову.

— Но вместо одной отрубленной головы у дракона сразу появилось три новых! — воскликнула Алиса. — Рыцарь рубил и рубил головы дракону, и всякий раз вместо одной головы появлялось три...

— Тогда у этой истории нет конца, — заметила Лорина, — ведь самого большого числа не существует!

— Ты забыла, что дело было в лесу, — напомнила Алиса.

— Ну и что? — удивилась Лорина.

— Чем больше голов становилось у дракона, тем сильнее он запутывался в деревьях, — объяснила Алиса. — И, наконец, он запутался совсем... Дальше продолжай ты, — предложила она Лорине.

— Я не знаю, что делать с драконом, который запутался в деревьях, — растерялась Лорина.

— Бедный дракончик, — пожалела Эдит.

— Не такой уж он несчастный, — неожиданно сказал мистер Доджсон. — Этот дракон стал знаменитостью, и к нему теперь водят экскурсии.

— А он не опасен? — спросила Эдит.

— Ни чуточки, — отозвался мистер Доджсон. — Все его головы так крепко запутались в деревьях, что он и шагу ступить не может.

— А что он ест? — озабоченно спросила Алиса.

— Его кормят туристы, — объяснил мистер Доджсон. — Каждую голову кормят отдельно...

— А сколько у него стало голов? — поинтересовалась Лорина, которая во всем любила точность.

— *Ровно триста*, — секунду подумав, ответил мистер Доджсон.

— А что было с жеребёнком? — спросила Эдит.

— Дальше расскажу я, — предложила Лорина. — Рыцарь вежливо попрощался с драконом...

— И сразу нашел врача? — нетерпеливо перебила Эдит.

— Нет, — ответила Лорина. — Врача рыцарь не нашёл.

— Неужели во всем лесу не нашлось ни одного врача? — всплеснула руками Эдит. — Куда же они все подевались?

— Они разбежались, когда услышали рёв трёхсот драконьих глоток, — объяснила Лорина, которая начала входить во вкус.

— Но, может быть, там был хоть один *глухой* врач? — с надеждой спросила Эдит.

— Был, — подумав, сказала Лорина. — Но он пошел в оперу...

— В оперу? Глухой? — поразилась Алиса.

— Его срочно вызвали в театр, потому что дирижёр во время спектакля проткнул палочкой скрипача...

— Насквозь? — спросил мистер Доджсон.

— Да, — решительно ответила Лорина. — Этот скрипач очень сильно фальшивил...

— Тогда тут нет противоречия, — кивнул головой мистер Доджсон.

— А жеребёночек? — чуть не плача, спросила Эдит. — Ты о нём совсем забыла!

— Жеребёнок сам нашел свинушки, — сказала Лорина.

— Только не говори, что он сам их и жарил! — предостерегла Лорину Алиса. — Ведь сковороды у него не было!

— Грибы изжарил рыцарь, — объяснила Лорина.

— Неужели у рыцаря была с собой сковорода? — удивилась Эдит.

— У него был шлем! — воскликнула Лорина. — Рыцарь изжарил грибы в шлеме и дал их жеребёнку. Тот сразу выздоровел, рыцарь взял его под уздцы, и они пошли дальше...

Какое-то время все сидели молча; был слышен только мерный звук вёсел.

— Придумывать сказку ещё интереснее, чем её слушать, — сказала вдруг Лорина.

— И не так уж трудно придумать необычную историю без противоречий, — заметила Алиса.

— А мне кажется, что если бы в нашей истории было какое-нибудь противоречие, она стала бы ещё интересней, — произнёс мистер Доджсон.

— Почему? — спросила Эдит.

— Потому что это противоречие надо было бы найти! — ответил мистер Доджсон.

— Может быть, — согласилась Лорина. — Но ведь в нашей истории противоречий нет.

— Есть, — неожиданно признался мистер Доджсон. — По моей вине в нашу историю вкралось по крайней мере *одно* противоречие.

— Как же мы его не заметили? — удивилась Алиса.

— Сейчас мы его найдём, — сказала Лорина. — Вы помните, о чём рассказывал мистер Доджсон? — обратилась она к сестрам.

— Он говорил, что дракон стал знаменитостью и к нему водят экскурсии... — начала вспоминать Алиса.

— Ещё мистер Доджсон говорил, что дракона кормят туристы, — добавила Эдит.

— Во всем этом пока нет никаких противоречий, — рассудила Лорина. — Если дракон стал знаменитостью, к нему должны водить экскурсии. А если к нему водят экскурсии, то туристы кормят дракона, потому что туристы всегда кормят животных. Правда, дракон не совсем обычное животное...

— Может быть, его кормят не туристы, а *туристами*? — предположила Эдит.

— Тогда получилось бы противоречие! — возразила Алиса. — Если бы туристы не возвращались из экскурсий, они не могли бы рассказывать о драконе, и он перестал бы быть знаменитостью!

— Действительно, — согласилась Эдит.

— Значит, противоречие в чём-то другом, — заключила Алиса. — Послушай, — обратилась она к Лорине, — ты, кажется, о чём-то спрашивала мистера Доджсона?

— Я спрашивала, сколько у дракона голов, — сказала Лорина, — и мистер Доджсон ответил, что ровно триста.

— Может быть, *в этом* есть какое-то противоречие? — спросила Алиса. — Хотя вряд ли: махнул рыцарь сто раз мечом, вот и стало у дракона триста голов...

— С каждого взмаха рыцарь отрубал дракону одну голову? — уточнила Лорина.

— Да, — кивнула Алиса.

— Махнул сто раз мечом... — задумчиво произнесла Лорина. — Но после этого у дракона будет не триста голов...

— А сколько же? — удивилась Алиса. — Ведь после каждого взмаха появляются три новых головы... Ой! *Одна* голова-то *слетает*!

— Вот-вот, — подхватила Лорина. — И поэтому после каждого взмаха у дракона становится не на три головы больше, а только на *две*!

— Ну и пусть! — махнула рукой Алиса. — Значит, чтобы у дракона стало триста голов, рыцарю придётся махнуть мечом не сто раз, а... триста разделить на два... сто пятьдесят раз! Для него это всё равно!

— Если рыцарь махнет мечом сто пятьдесят раз, у дракона станет на триста голов больше, чем было *вначале*! — возразила Лорина. — А ведь у него с самого начала уже было три головы. Значит, у дракона станет не триста голов, а *триста три*!

— Так сколько же раз рыцарю надо махать мечом, чтобы у дракона стало ровно триста голов? — нетерпеливо спросила Эдит.

— Сейчас подсчитаем, — сказала Лорина. — У дракона вначале было три головы, а в конце стало триста, значит, у него добавилось двести девяносто семь голов... После каждого взмаха

меча число голов увеличивалось на два... Чтобы узнать, сколько раз рыцарю пришлось махать мечом, надо двести девяносто семь разделить на два... Но двести девяносто семь на два не делится!

— Значит, трехсот голов у дракона быть *не может*! — воскликнула Алиса. — Вот оно — противоречие!

— Вы нашли его довольно быстро, — признал мистер Доджсон.

— А вы его довольно ловко запрятали, — ответила Лорина любезностью на любезность. — Но как вы успели так быстро сосчитать, что у дракона не может быть трёхсот голов — ведь на мой вопрос вы ответили сразу!

— *Почти* сразу, — напомнил мистер Доджсон. — Но я почти ничего и не считал.

— Вы просто угадали? — спросила Эдит.

— Ну нет, — улыбнулся мистер Доджсон. — Я могу наверняка сказать, что у этого дракона не может быть, например, миллиона голов. Или, скажем, трёх миллиардов восьмисот тридцати двух миллионов семисот сорока одной тысячи четырёхсот восьмидесяти шести голов!

— Вот это да! — поразилась Эдит.

В наступившей тишине стало слышно, что Алиса бормочет: «Пять, семь, девять...»

— Что ты считаешь? — удивилась Лорина.

— Я считаю, сколько голов становилось у дракона, когда рыцарь отрубал ему одну голову за другой, — объяснила Алиса.

— До миллиардов ты будешь считать очень долго, — забеспокоилась Эдит, но Алиса продолжала:

— ...одиннадцать, тринадцать, пятнадцать...

— Хватит! — воскликнула вдруг Лорина. — До миллиардов можно не считать: и так уже всё понятно!

— А мне ещё не совсем всё понятно, — призналась Алиса, прерывая счет. — Я заметила только, что получаются *нечётные* числа...

— В этом всё и дело! — сказала Лорина. — Ведь ты начала с *трёх* и прибавляла каждый раз по *два*.

— Значит, у дракона не может быть *чётного* числа голов! — догадалась Алиса. — Так вот почему мистеру Доджсону ничего не надо было считать — он мог просто назвать любое чётное число, и противоречие готово!

— Так я и сделал, — признался мистер Доджсон, и все рассмеялись.

— А знаете, откуда берутся драконы с семью головами? — спросила вдруг Эдит. — Это драконы, у которых вначале было три головы, но две из них уже отрубили...

— А драконы с тремя головами — это те, у которых сначала была только одна голова, — добавила Алиса.

— Но откуда же тогда берутся драконы с одной головой? — озадаченно спросила Эдит, но вопрос её остался без ответа: лодка пристала к берегу и все начали выходить.

Мистер Доджсон предложил зайти к нему — он хотел угостить девочек чаем и заодно показать им свои фотографии (в те времена фотографии были ещё редкостью, но мистер Доджсон уже успел стать страстным фотографом). Во время этого краткого визита произошел ещё один любопытный разговор.

Перед самым уходом Алиса подошла к большому книжному шкафу, который стоял слева от камина, и, склонив голову, попыталась прочесть на корешках названия книг. Однако у неё ничего не получилось, хотя названия были написаны английскими буквами: дело в том, что слова на корешках книг были почти все незнакомы Алисе!

— О чём эти книги? — спросила Алиса у мистера Доджсона.

— Это книги по математике, — ответил он.

— А что такое математика?

— Это... — в глазах у мистера Доджсона мелькнула улыбка. — Это *большая выдумка без обмана*!

— Это *всё* выдумка?! — поразилась Алиса, глядя снизу вверх на длинные полки, уставленные толстыми книгами.

Мистер Доджсон проводил девочек домой и, вернувшись, сел записывать сказку, рассказанную им во время прогулки.

«Я просидел целую ночь, записывая в большую тетрадь все глупости, какие запомнились», — рассказывал он потом.

ГДЕ И КОГДА ЗАРОДИЛАСЬ МАТЕМАТИКА

Однажды немецкого математика Гильберта спросили об одном из его бывших учеников.

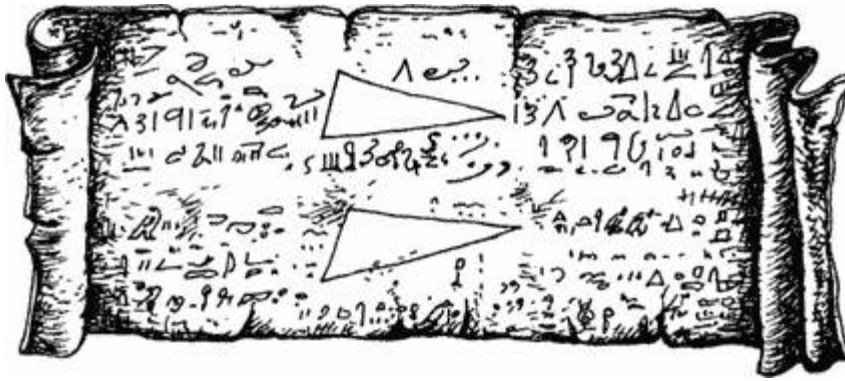
— Он стал поэтом, — ответил Гильберт. — Для математика у него было слишком мало воображения.

Такой ответ мог бы удивить кого угодно, только не математика: любой математик знает, что воображение — главное качество математика (тот, кто этого не знает, не математик!). Однако это не единственное качество — математик должен ещё уметь чётко рассуждать, чтобы доказать, что в его выдумке нет «обмана», то есть *нет противоречий*.

Как же возникла математика — наука, в которой удивительным образом соединяется то, что кажется несовместимым — яркое воображение и строгая логика? (Логикой называют правила рассуждений.)

Начиналась математика в древнем мире с расчётов, нужных для строительства, торговли и земледелия. До наших дней сохранились древнеегипетские папирусы и древневавилонские глиняные таблички с чертежами и вычислениями. Им около четырёх тысяч лет! Один из папирусов начинается словами: «Наставление, как достигнуть знания всех непонятных вещей, всех тёмных тайн». Однако никакой науки там ещё нет — действительно, разве можно назвать наукой большое число примеров, как вычислить площадь поля для посева или количество камней для постройки пирамиды? Рассуждений при этом не приводилось, вместо этого писали: «Делай то же самое при любом подобном случае». Здесь не было ни полёта фантазии, ни доказательств.

Всё изменилось, когда математические знания египтян и вавилонян попали к грекам — именно в Древней Греции и родилась настоящая математика!



Древнеегипетский папирус. Так выглядели учебники, по которым четыре тысячи лет назад обучали в школах египетских писцов

А так выглядел сам египетский писец. В Древнем Египте писцы пользовались большим почетом, потому что они умели не только читать и писать, но и *считать*! Внизу изображен «письменный прибор» египетского писца

На таких глиняных табличках писали древневавилонские «школьники». Точнее, не писали, а выдавливали особой палочкой — поэтому исправлять ошибки в таких «тетрадках» было очень удобно

Это «страница» из древневавилонского «учебника математики»: в нем было около сорока «страниц» — огромных глиняных таблиц. Древневавилонские «книги» не боялись огня — наоборот, их *надо* было обжечь, чтобы глина затвердела

Любимым вопросом древних греков был вопрос «почему?», а с этого вопроса начинается любая наука. Греки начали доискиваться: *почему* надо применять в расчетах то или иное правило? *Всегда* ли оно даёт правильный результат? Как *доказать* правильность? Древнегреческий учёный Фале́с, который жил за шестьсот лет до нашей эры, первым ввел в математику *доказательства*, и поэтому его считают первым математиком в истории. Однажды греки решили подарить мудрейшему из людей золотую чашу, и этим мудрейшим был избран именно Фалес. Но Фалес передал подарок другому мудрецу, которого он считал более достойным, тот — третьему, и так чаша обошла по кругу семерых мудрецов, вернувшись в конце концов снова к Фалесу.

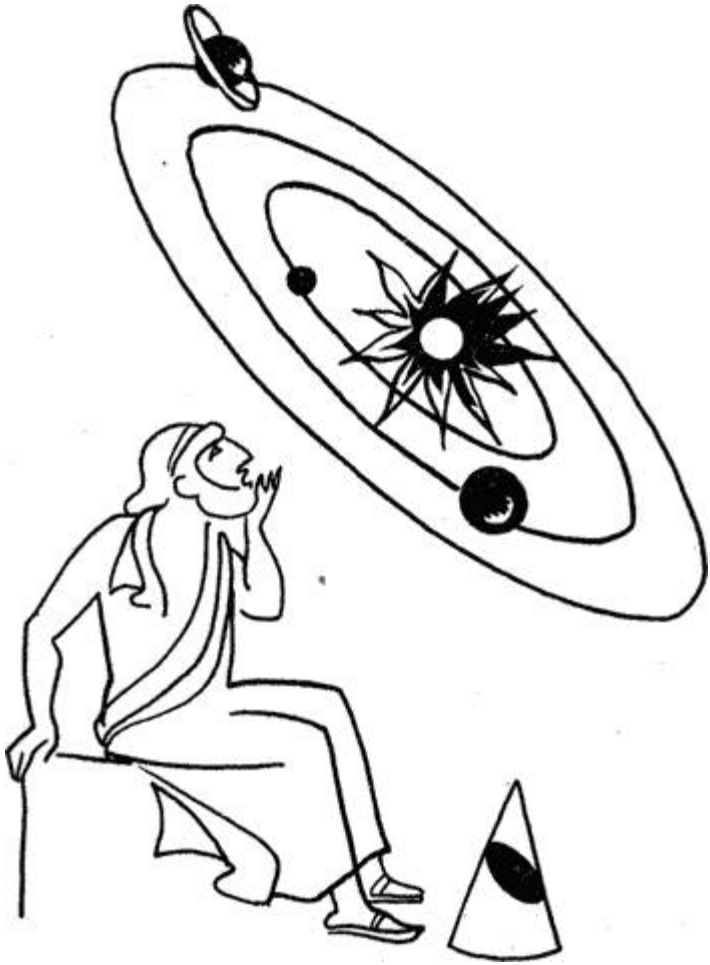
В искусстве рассуждений греки превзошли всех, кто жил до них, и очень многих из тех, кто жил после. Умению рассуждать и доказывать мы учимся у древних греков *до сих пор*: древнегреческая математика — единственная наука, которая прошла испытание тысячелетиями.

Когда греков завоевали римляне, развитие математики надолго остановилось — на целую тысячу лет! Возродили математику арабы, которые изучили и перевели на арабский язык книги древнегреческих учёных. Кстати, у арабов был и выдающийся поэт-математик, звали его Омар Хайям. О некоторых его математических открытиях мы расскажем позже, а вот одно из

его стихотворений*:

Мне мудрость не была чужда земная,
Разгадки тайн ища, не ведал сна я.
За семьдесят перевалило мне,
Что ж я узнал! — Что ничего не знаю.

Однако вернемся к грекам — это они принесли в математику не только логику, но и воображение: они стали изучать числа и фигуры не только для «жизненных потребностей», но и просто потому, что это оказалось необычайно *интересным*. Так числа и фигуры начали жить в воображении математиков своей жизнью, и вот что самое удивительное: открытия, сделанные в *воображаемом* мире, помогали открывать законы *окружающего* мира! Итальянский учёный Галилей писал: «Великая книга природы может быть прочитана только теми, кто знает язык, на котором она написана, и язык этот — математика».



Древнегреческие учёные подробно изучили «конические сечения» — фигуры, которые получаются при пересечении конуса плоскостью (такое «сечение конуса» изображено на рисунке черным цветом). Никому из древних греков и в голову не приходило, что планеты, которые они видят на небе, движутся вокруг Солнца, описывая именно такие фигуры!

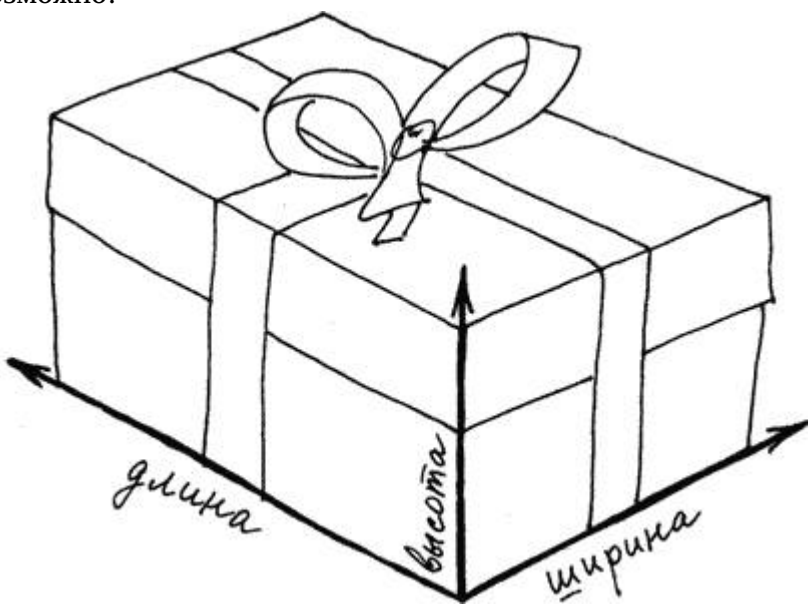
Бывало, что проходили тысячелетия, прежде чем открытие математиков находило применение. Вот, наверное, самый поразительный пример. За несколько веков до нашей эры греческие учёные Евклид, Архимед и Аполлоний из «чистого интереса» изучили свойства эллипса — фигуры, похожей на сплюснутую окружность. Прошло больше полутора тысяч лет, и немецкий астроном Кеплер обнаружил, что планеты движутся вокруг Солнца именно по эллипсам — тем самым «древнегреческим» эллипсам! А через пятьдесят лет после Кеплера «чисто математическая» теория древних греков помогла английскому учёному Ньютону открыть закон всемирного

тяготения, «управляющий» движением планет.

А вот ещё один пример. В начале XIX века трое учёных: русский математик Лобачевский, венгр Больяи и немец Гаусс независимо друг от друга придумали (именно придумали!) необычную геометрию, настолько необычную, что Гаусс, который считался тогда «королем математиков», не решился даже обнародовать свою работу. Лобачевский же посвятил разъяснению своей геометрии всю жизнь, но так и не получил признания учёного мира — уж очень странной казалась эта «выдумка». Однако «обмана» в ней не было: геометрия Лобачевского не содержала противоречий! Идеи Лобачевского развил немецкий учёный Риман (он родился как раз в том году, когда Лобачевский представил свою работу для опубликования!). Риман показал, что можно построить *бесконечно много разных геометрий*, среди которых — и привычная «школьная» геометрия (ее называют *«евклидовой»* по имени древнегреческого математика Евклида), и геометрия Лобачевского.

А в начале XX века оказалось, что риманова геометрия имеет самое непосредственное отношение к реальному миру: согласно теории относительности Эйнштейна геометрия нашего мира не «евклидова», а именно «риманова»!

И, наконец, третий пример. Тот самый Гильберт, с которого мы начали свой рассказ, в самом начале XX века придумал совсем уж странную вещь: он изобрел пространство, в котором не *три* измерения, как в нашем обычном пространстве (длина, ширина и высота), а *бесконечное число* измерений! Такое даже представить невозможно!



В нашем пространстве три измерения, и поэтому любой *настоящий* предмет имеет длину, ширину и высоту

Однако через четверть века оказалось, что без гильбертова пространства (так его назвали) было бы невозможно описывать мир атомов. А поскольку все мы состоим из атомов, значит, в каждом из нас на самом деле существует это удивительное пространство с бесконечным числом измерений! «Я развил свою теорию из чисто математических интересов, — вспоминал потом Гильберт, — абсолютно не подозревая, что позже она найдет применение в физике».

НЕБЫЛИЦА О ФАЛЕСЕ ИЗ МИЛЕТА, ЗНАМЕНИТОМ ДРЕВНЕГРЕЧЕСКОМ МУДРЕЦЕ, КОТОРЫЙ ПЕРВЫМ ПРЕДСКАЗАЛ СОЛНЕЧНОЕ ЗАТМЕНИЕ

Помнят люди историю эту,
Хоть прошло с той поры много лет.
Шёл однажды Фалес из Милета,
А, быть может, шагал он в Милет.

Размышлял он о тайнах природы,
О строеньи Земли и небес —
Ведь из всех мудрецов всенародно
Самым мудрым был признан Фалес.

Предсказал он недавно затменье,
И теперь каждый день его ждал...
Так, задумавшись, он не заметил,
Что в колодец случайно упал.

— Я слыву мудрецом не напрасно! —
Он вскричал. — Знаю я, почему
Среди дня наше солнце погасло,
И весь мир погрузился во тьму!

НАСТОЯЩЕЕ И ВООБРАЖАЕМОЕ

Слова мистера Доджсона о математике не шли из головы у Алисы. На следующий день она попросила у Лорины её учебник математики и удобно устроилась на диване вместе с учебником и кошкой Диной.

— Сейчас мы посмотрим, что это за выдумка без обмана! — сказала Алиса и раскрыла книгу.

Увы — эта книга оказалась не похожей на книгу сказок!

Она вообще не была похожа ни на одну из книг, которые Алиса читала до сих пор.

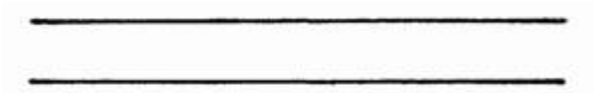
— Что толку в книге, если буквы в ней не всегда складываются в слова? — удивлённо думала Алиса. — Всё это действительно похоже на выдумку... Но о чём же эта выдумка? Я вижу здесь только числа и фигуры... Впрочем нет, тут есть и портреты! Какие красивые имена: Пифагор, Евклид, Архимед... Здесь написано, что это великие математики... Значит, они и придумали всю эту историю о числах и фигурах? Но как можно *проверить*, что в этой выдумке *нет обмана*? Этого я себе даже не представляю!

Алиса посмотрела на Дину и увидела, что та уставилась в книгу немигающими глазами.

— Кажется, ты тоже не всё тут понимаешь, — сказала Алиса. — Однако тут есть и слова... попробуем их прочитать...

Первыми ей попались на глаза слова «параллельные прямые». Слово «параллельные» Алиса прочла только со второй попытки (такое слово стоило запомнить, чтобы при случае удивить им кого-нибудь в разговоре), зато слово «прямые» было совсем простым и понятным! И к тому же Алиса увидела рисунок, под которым была подпись: «параллельные прямые».

— Это же просто линии, похожие на рельсы! — воскликнула Алиса. — Но зачем для таких простых вещей нужны такие непростые слова?



Она стала читать дальше и обнаружила, что простое слово «прямая» не такое уж простое: оказывается, так называется *бесконечная* прямая линия, то есть прямая линия, у которой *нет концов*!

Алиса честно попыталась представить себе такую линию: сначала она представила просто длинную прямую линию, потом очень длинную линию, потом очень-очень длинную линию...

Концы линии уходили всё дальше и дальше, но они *оставались*!

Алиса закрыла глаза и представила, что прямая линия пронизывает стены комнаты, выходит за пределы Оксфорда, всей Англии, уходит к звёздам и простирается в обе стороны всё дальше и дальше... дальше самых далёких звёзд... и ещё дальше... У Алисы даже голова закружилась.

— Вот это выдумка! — признала Алиса. — Такой выдумки я не встречала ни в одной сказке...

Ей представилось, что она идёт по прямой дороге, у которой нет конца... идёт, идёт и идёт...

И вдруг её обогнал Белый Кролик — тот самый Белый Кролик, из той самой Страны Чудес, о которой вчера рассказывал мистер Доджсон. На бегу Кролик то и дело вытаскивал часы из жилетного кармана и причитал:

— Боже мой! Боже мой! Как я опаздываю!

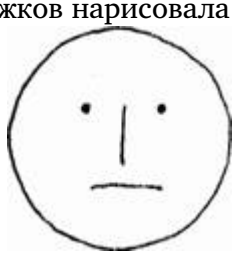
— По *этой* дороге вы никуда не дойдете! — хотела крикнуть ему вслед Алиса и проснулась.

— Когда же я заснула? — удивилась она и вздохнула. — Бедный Кролик! Теперь его никто уже не остановит, и ему придётся бежать вечно...

Стряхнув сон, Алиса захотела посмотреть рисунки — к счастью, их в книге было много. Однако почти все рисунки оказались какими-то безжизненными: прямые линии да кружочки!

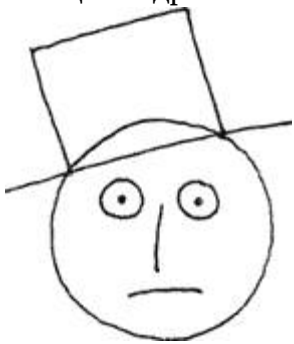
— Почему так мало портретов? — удивлялась Алиса, листая учебник. — Неужели это *всё* математики? Как же они тогда смогли придумать столько книг по математике — целый шкаф? Наверное, дело в другом, — догадалась она, — просто художник только учился рисовать, и ему ещё не разрешали часто рисовать людей!

Алиса вспомнила, что когда она сама училась рисовать, ей тоже задавали сначала рисовать прямые линии и кружочки. Зато потом оказалось, что с их помощью можно нарисовать очень многое! И Алиса решила, что сейчас как раз подходящий случай применить свои знания. Она взяла карандаш и в одном из кружков нарисовала два глаза, нос и рот — страница сразу ожила:



— Вот и стало одним портретом больше! — обрадовалась Алиса. — Только *чей* же это портрет?

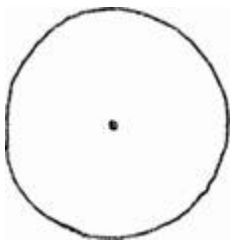
И тут она увидела, что квадрат, нарисованный на той же странице, тихо соскользнул со своего места, подхватил с соседних рисунков чёрточку и два маленьких кружочка и направился к новому портрету — через секунду на Алису уже смотрел человек в шляпе-цилиндре:



— Ты отгадала загадку? — спросил он после некоторого молчания. — Что общего у ворона с конторкой?

— Это Шляпник из Страны Чудес! — догадалась Алиса и начала вежливо объяснять ему, что он перепутал её *с другой* Алисой — той, что была в Стране Чудес. Но Шляпник молча смотрел на Алису широко раскрытыми глазами, и было непонятно: слышит он её или нет, а если слышит, то понимает ли?

— До свидания, — сказала Алиса Шляпнику, перевернула страницу и вздрогнула: прямо со страницы на неё в упор смотрел огромный глаз!



Под рисунком было написано, что это — *окружность*, а точка в самой середине — *«центр окружности»*. Чтобы нарисовать окружность, прочитала Алиса, надо поставить одну ножку циркуля в центр окружности, и тогда вторая ножка как раз обежит окружность.

«Взгляд окружности» словно пронизывал Алису, и ей пришла в голову удивительная мысль:

— Может, это не точка, а *прямая*, которая идет *оттуда сюда* или... или *отсюда туда*?

Вдруг Алиса заметила, что бумага внутри окружности стала темнеть, и там начали зажигаться звёзды, как на ночном небе. Алиса подалась вперёд: в голове у неё пронеслось, что такого она

ещё никогда не видела!

То ли окружность выросла, то ли Алиса уменьшилась, но в следующее мгновение Алиса оказалась внутри окружности — она стояла на светящейся туго натянутой струне, которая уходила в звёздное небо. Сгорая от любопытства, Алиса побежала по струне.

Пробежав несколько шагов, она остановилась и осмотрелась: со всех сторон её окружало звёздное небо — звёзды были даже внизу! Алиса испугалась, что упадёт, но тут же успокоила себя:

— Даже если я упаду, то не разобьюсь — здесь просто не обо что удариться!

Обернувшись назад, Алиса увидела, что струна, на которой она стоит, выходит из центра большой светящейся окружности.

— Значит, то была действительно не точка, а прямая! — воскликнула Алиса. — И теперь я смогу *сама* проверить — есть концы у прямой или нет!

Она проследила взглядом вдоль струны в обе стороны — концов струны не было видно.

— Но это ещё не значит, что концов *нет*, — рассудила Алиса. — Может, они просто очень далеко отсюда?

И Алиса побежала по струне дальше. Бежать было на удивление легко: казалось, ноги её вот-вот оторвутся от струны, и она полетит.

— Да я *уже* лечу! — поняла вдруг Алиса.

И действительно, обернувшись, она увидела, что светящаяся окружность стремительно удаляется, становясь всё меньше и меньше — через несколько минут она стала такой маленькой, что Алиса совсем перестала её различать.

— Как же теперь узнать, лечу я или не лечу? — забеспокоилась Алиса: взгляд её скользил по струне, и ему не за что было зацепиться!

Алиса с надеждой посмотрела на звёзды, но они были так далеки, что по ним никак нельзя было определить, движется она или нет. К тому же, оглядываясь, она повернулась несколько раз кругом, и поэтому теперь не знала даже, *откуда и куда* она летела!

— Никогда ещё я не попадала в такое глупое положение! — огорчилась Алиса. — Заблудиться на одной-единственной струне — я бы ни за что не поверила, что такое возможно!

Она посмотрела на безумно далёкие звёзды, и ей стало так жалко себя, что слёзы брызнули у неё из глаз.

— Как бы я хотела, чтобы рядом со мной появился хоть кто-нибудь! — подумала Алиса.

И тут же рядом с ней кто-то появился.

Смахнув слёзы, Алиса увидела огромного кота — причём не

целого кота, а только одну голову! Голова улыбалась во весь рот, и при этом было видно очень много зубов.

— Я подойду в качестве *«кого-нибудь»*? — осведомилась голова.

Алиса кивнула (говорить она не могла!), и кот, не торопясь, стал появляться дальше.

— Это Чеширский Кот из Страны Чудес! — мелькнуло в голове у Алисы. — Так появляться умеет только он!

— Ты угадала, — потягиваясь, произнёс Кот: он уже появился полностью и оказался ростом как раз с Алису.

Для начала беседы Алиса решила задать вопрос, довольно важный для нее:

— Скажите, пожалуйста, куда я попала? Это Страна Чудес?

— Смотря что ты называешь *чудесами*, — отозвался Кот.

— Чудеса — это то, чего не бывает на самом деле, — сказала Алиса, удивляясь, что Кот не знает таких простых вещей.

— А *где* же тогда это бывает? — поинтересовался Кот.

— Это бывает только в нашем воображении, — подумав, ответила Алиса.

— В воображении? — переспросил Кот. — Тогда считай, что ты действительно попала в Страну Чудес, потому что *всё* здесь — одна сплошная выдумка! Правда, довольно большая...

И тут Алису осенила внезапная догадка.

— Эта выдумка — без обмана? — быстро спросила она. В ответ Кот обиженно пожал плечами.

— Значит, я попала в Страну Математики! — воскликнула Алиса.

— Ты опять угадала! — ответил Кот.

— А что-нибудь *настоящее* тут есть? — поинтересовалась Алиса. — Или всё только *воображаемое*?

— Разве ты умеешь отделять одно от другого? — удивился Кот.

Алиса внимательно посмотрела на Кота, пытаясь понять: шутит он или говорит серьёзно. Но понять это было довольно трудно, потому что Кот улыбался *всё время*.

И Алиса продолжила разговор.

— Настоящее можно *увидеть*, а воображаемое — нельзя, — сказала она.

— Увидеть? — задумчиво повторил Кот. — А ты когда-нибудь видела *линию горизонта*?

— Много раз, — с готовностью ответила Алиса. — Особенно хорошо эта линия видна на море...

— Значит, по-твоему, линия горизонта — настоящая? — спросил Кот.

— Я этого не говорила, — возразила Алиса.

— Как? — удивился Кот. — Ты же сказала, что *видела* линию горизонта, и что увидеть можно только *настоящее*!

Вопросы Кота становились всё труднее!

— Жаль, что здесь нет глобуса или хотя бы мяча, — сказала Алиса. — Я бы показала вам, что такое линия горизонта, и вы бы тогда поняли...

— Лови! — крикнул Кот, бросая Алисе неизвестно откуда взявшийся голубой мяч.

Она поймала мяч и стала объяснять дальше.

— Представьте, что это земной шар, и здесь находится корабль, — прикоснулась Алиса к мячу. — И пусть этот корабль уплывает от нас... — Она повела пальцем по поверхности мяча. — Видите: когда корабль уплывает далеко, он как бы прячется за Землю! Это и означает, что корабль уходит за линию горизонта... Так что, как видите, линия горизонта — это воображаемая линия...

— *Вижу*? — перебил Кот. — Но ты же говорила, что воображаемое увидеть нельзя!

— Получается, что можно, — признала Алиса.

— То-то же, — сказал Кот. — Настоящее и воображаемое так переплетены друг с другом, что в одном без другого просто не разберёшься! А вот скажи: у *мяча* линия горизонта — настоящая или воображаемая?

— Но разве у мяча есть линия горизонта? — удивилась Алиса и вдруг заметила, что на голубом мяче начали проступать жёлто-зелёные пятна со знакомыми очертаниями: она держала в руках уже не мяч, а глобус!

Алиса держала глобус, касаясь Северного и Южного полюсов, и в следующее мгновение ощутила жгучий холод: глобус превратился в маленький земной шар! Она отдернула руки, и земной шар медленно поплыл в пространстве.

Когда Алиса пришла в себя от удивления, земной шар был уже далеко.

— Земля и мяч действительно очень похожи друг на друга, — сказала Алиса, провожая взглядом уплывающий мяч-глобус-земной шар.

— Они не просто похожи, — отозвался Кот. — Они *подобны друг другу*!

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— Это значит, что у них одинаковая *форма*, — ответил Кот.

— А что такое форма? — задала Алиса новый вопрос (она была довольна, что теперь, наконец, спрашивает она!).

— Сейчас ты поймёшь это на собственном примере, — сказал

Кот и стал так быстро увеличиваться, что Алиса испугалась.

— Ты стала сейчас в десять раз меньше, — к её удивлению сказал Кот, — но форма твоя осталась прежней.

— По-моему, я осталась такой же, какой была, — возразила Алиса, оправившись от испуга. — А вот *вы* стали в десять раз больше!

— Нет, — стоял на своем Кот. — Это *ты* стала меньше! Впрочем, — посмотрел он по сторонам, — здесь мы всё равно не сможем разрешить наш спор.

— Конечно, — согласилась Алиса, тоже посмотрев вокруг. — Ведь здесь мы можем сравнивать себя только *друг с другом*!

И Кот сразу же уменьшился до размеров Алисы. (Или Алиса увеличилась до размеров Кота? Это осталось загадкой!).

— Кажется, я поняла, что такое форма, — сказала Алиса. — Это то, что сохраняется, когда меняются только размеры!

— Правильно, — подтвердил Кот. — Так вот, скажи: *форма* — это что-то настоящее или воображаемое?

— Наверное, воображаемое, — ответила Алиса. — Хотя все настоящие предметы обязательно имеют какую-то форму, но ведь самой по себе формы без предмета не существует!

— В том-то и дело, — отозвался Кот. — А ты говорила, что настоящее так просто отделить от воображаемого!

— Теперь я вижу, что это действительно не так просто, — согласилась Алиса.

Она хотела обдумать это получше, но Кот спросил:

— А как ты думаешь: *числа* — настоящие или воображаемые?

— С помощью чисел считают настоящие предметы, — начала размышлять вслух Алиса, — числа можно *увидеть*...

— Ты когда-нибудь видела хотя бы одно число? — удивился Кот.

— Я видела *много* разных чисел! — воскликнула Алиса. — Если бы здесь были карандаш и бумага...

Кот протянул Алисе большой белый лист бумаги и карандаш, и она нарисовала большую красивую пятерку.

— Вот число «пять», — сказала Алиса.

— Я вижу только *цифру* «пять», — возразил Кот.

— Но разве цифра — это не число? — удивилась Алиса.

— Конечно, нет! — воскликнул Кот. — С помощью цифр только *записывают* числа, да и то в разные времена разные народы делали это по-разному. Древние египтяне, например, записывали число «пять» так, Кот нарисовал пять палочек:

— А у древних римлян, — продолжал Кот, — для числа «пять» был такой знак:

— Действительно, числа и цифры — это не одно и то же, — признала Алиса, глядя на разные записи числа «пять». — И всё-таки мне трудно поверить, что числа — только воображаемые... Например, пять девочек можно не только вообразить — они могут быть и на самом деле! У меня как раз пять подружек...

— Они приходят к тебе в гости? — поинтересовался Кот.

— Как раз позавчера они приходили на чай, — сказала Алиса.

— И перед каждой из них поставили *одну* чашку? — спросил Кот.

— Конечно! — удивилась Алиса такому странному вопросу.

— Тогда скажи, — продолжал Кот, — было ли что-нибудь общее у девочек и чашек?

Алиса закрыла глаза и представила стол, за которым сидят пять ее подружек, и перед каждой из них стоит чашка чая — чашек, конечно, тоже было пять...

— *Тоже пять*! — осенило Алису, и она радостно воскликнула: — Девочек и чашек *одинаковое число*!

— Правильно! — обрадовался Кот не меньше Алисы. — Число — это и есть то *общее*, что есть у пяти девочек, пяти чашек, пяти пальцев и даже пяти чувств! Вот и скажи теперь: число — это настоящее или воображаемое?

— Наверное, тоже воображаемое, — признала Алиса. — Но отделить число девочек от самих девочек довольно трудно...

— Трудно, — согласился Кот, — но *можно*! Как видишь, для того, чтобы по-настоящему разобраться в настоящем, надо иметь хорошее воображение!

Кот сделал знак лапой, и от Алисы к звёздам протянулся ряд светящихся цифр — ими были записаны числа, которые стояли по порядку: 1, 2, 3, 4, 5... Числа выстроились как раз вдоль светящейся струны и уходили вдаль, насколько хватал глаз. Алиса, как зачарованная, смотрела на светящийся ряд чисел: он был очень красив на фоне звёздного неба!

— Вот чудо, с которого начинается вся математика, — торжественно произнёс Кот. — Оно называется *«натуральный ряд»*.

Алиса повернулась к Коту, но обнаружила, что от него осталась одна улыбка. Несколько секунд улыбка Кота ещё витала в пространстве и, наконец, исчезла совсем.

Алиса ступила на струну и пошла вдоль светящихся чисел.

КАК ЛЮДИ УЧИЛИСЬ СЧИТАТЬ

Было время, когда человек уже был человеком, но считать ещё не умел. Точнее, он знал только два числа: «один» и «много». Потом это «много» стало отодвигаться всё дальше и дальше — появились числа «два», «три»... — но это было так медленно, что на каждое новое число уходили столетия, а то и тысячелетия!

Представьте себе: человек уже делал замечательные каменные орудия, западни для диких зверей, шил одежду из шкур — и всё это — проявляя чудеса изобретательности! А вот считать человек не умел. Почему?

Как ни странно, потому, что ему трудно было заметить *сходство* предметов! Считать ведь можно только предметы, похожие чем-то друг на друга, а первобытному человеку всё казалось различным. Каждый человек из его племени был для него особенным — с каждым его связывали свои особые отношения: ведь всё племя было одной большой семьёй. Каждый зверь, убитый на охоте, тоже был единственным в своем роде — ведь каждая охота запоминалась надолго: она была настолько опасной, что могла стать последней. Вообще мир виделся первобытному человеку намного ярче, чем нам сегодня: даже деревья в лесу не казались ему одинаковыми — глаз его всегда искал, чем *отличается* одно дерево от другого (иначе легко было заблудиться и погибнуть!).

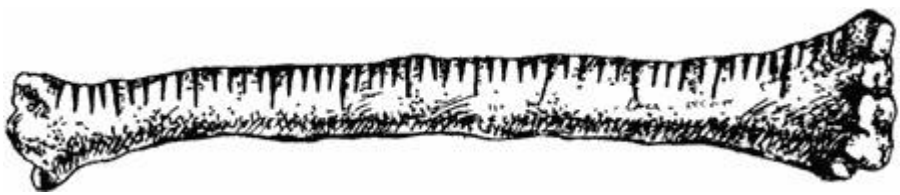
Однако постепенно человек начинал замечать сходство предметов, а когда люди стали чем-то обмениваться друг с другом, например, менять шкуры зверей на каменные топоры, появилась и потребность в счёте. Самый важный шаг был сделан, когда человек догадался *заменить* при счёте *одни* предметы *другими*, более удобными, потому что они всегда под рукой — например, камешками или раковинами. И когда человек заметил, что у двух шкур и двух камешков есть что-то *общее*, он сделал одно из величайших изобретений за всю человеческую историю — он изобрёл число!

Со временем человек обнаружил, что удобнее всего пользоваться для счёта предметами, которые находятся на *самой* его руке, то есть пальцами. Так человек начал считать пятёрками, десятками и двадцатками (в ход шли и пальцы ног!). Счёт десятками сохранился и в нашей десятичной системе счисления. Сохранились и названия некоторых чисел, связанные с первой «вычислительной машиной» — пальцами рук и ног: например, слово «пять» в русском языке происходит от древнеславянского слова «пясть» — рука (вспомните слово «запястье»). А у некоторых

племён число «двадцать» называлось «весь человек»!

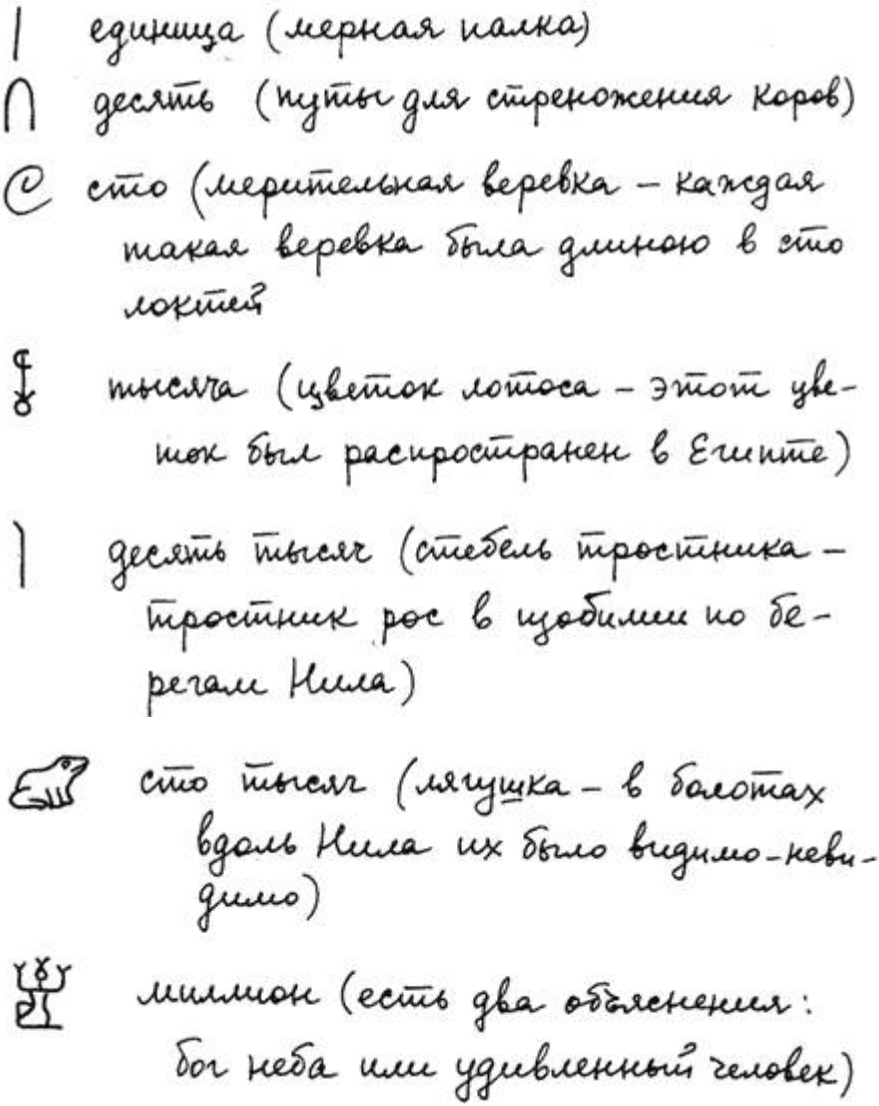
Этот первобытный человек сделал сейчас великое открытие — он понял, что у двух шкур и двух пальцев есть что то общее!

Записывали числа поначалу совсем просто: делали зарубки на куске дерева или кости.



На этой кости тридцать тысяч лет назад сделаны нарезки — они показывают, что уже тогда наши предки умели не только считать, но и *записывать* результаты счета!

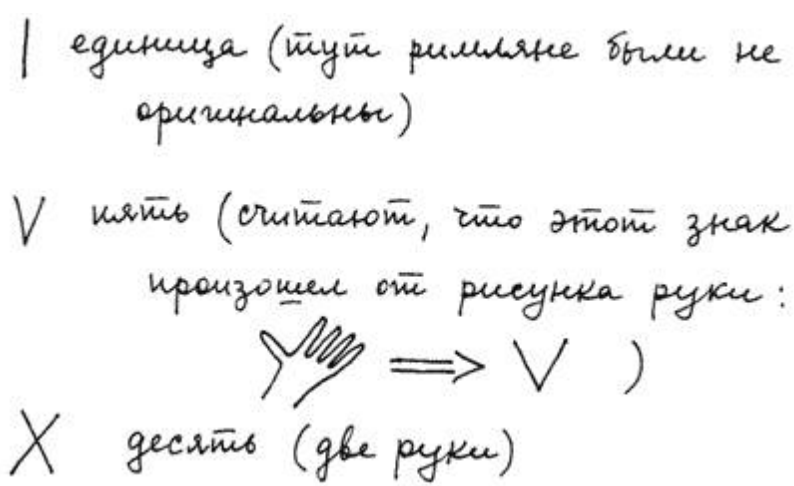
Когда понадобилось записывать большие числа, то для пятёрок или десяток стали придумывать новые знаки. Со временем понадобились знаки для десятка десятков и так далее. Очень наглядной была система таких знаков у древних египтян:


единица (мерная палка)
десять (путы для стреножения коров)
сто (мерительная веревка – каждая такая веревка была длиною в сто локтей)
тысяча (цветок лотоса – этот цветок был распространен в Египте)
десять тысяч (стебель тростника – тростник рос в изобилии по берегам Нила)
сто тысяч (лягушка – в болотах вдоль Нила их было видимо-невидимо)
миллион (есть два объяснения: бог неба или удивленный человек)

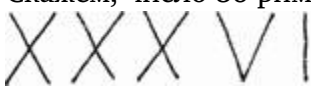
Вот как египтяне записывали, скажем, число 3246:

Несмотря на свою громоздкость, такая запись чисел была довольно удобной. Однако у неё был очень большой недостаток. Хотите знать, какой? Попробуйте *умножить* или *разделить* два числа, записанных древнеегипетским способом!

Запись чисел, похожую на египетскую, использовали и древние римляне, только цифры у них были другими, и обозначались ими не только десятки, но и пятерки, например:



Скажем, число 36 римляне записывали так:



Римскими цифрами иногда пользуются и сегодня: например, ими часто нумеруют главы в книгах. Однако *вычислять* с помощью римских цифр так же неудобно, как и с помощью египетских.

Казалось бы, удобные цифры должны были изобрести древние греки, которые создали математику как науку. Однако вычислениями греки не увлекались, и поэтому ограничились просто тем, что обозначили числа буквами своего алфавита. Так же, буквами, обозначали числа и в Древней Руси.

Те очень удобные числа, которыми мы пользуемся сегодня, изобрели индийцы: они так любили вычислять, что даже писали математические книги *в стихах*! (Представляете себе, насколько легче было бы выучить таблицу умножения, если бы она была записана стихами?). Индийцы догадались, что значение цифры может зависеть от её *места* в записи числа — именно благодаря этому оказалось возможным записывать *все* числа с помощью всего *десяти* цифр.

Индийские цифры так сильно упростили вычисления, что со временем завоевали весь мир. В Европу эти цифры попали благодаря арабам, поэтому индийские цифры часто называют *арабскими*.

До этого в Европе пользовались римскими цифрами. О том, насколько трудны были вычисления с этими цифрами, говорят слова одного европейского учёного, который жил около 700 года: «В мире есть много трудных вещей, но нет ничего труднее четырёх действий арифметики»!

НЕБЫЛИЦА О ДЕТСКОМ САДЕ, КОТОРЫЙ БЫЛ УЖЕ ТОГДА, КОГДА СЧИТАТЬ ЕЩЕ НЕ УМЕЛИ

В лесу первобытном под грохот там-тама
Открыт первобытный детсад,
И каждое утро ведут туда мамы
Своих первобытных ребят.

Приходят они в этот сад очень рано,
Но дети не плачут совсем.
И каждый ребёнок несёт по банану —
Вы скоро поймёте, зачем.

С улыбкою доброю няня встречает
Детей возле самых ворот,
И сразу бананы она собирает
И в сумку большую кладёт.

С детишками няня по джунглям гуляет,
Пока не стемнеет совсем,
И сумку с собою всё время таскает —
Сейчас вы поймёте, зачем.

Когда возвращаются дети с гулянья,
От шума устав и от игр,
Должна обязательно выяснить няня:
Не съел ли кого-нибудь тигр?

В кружок тогда няня детишек сажает
И сумку свою достаёт,
И всем по банану она предлагает,
И каждый, конечно, берёт.

И если кончаются в сумке бананы,
Уверена няня — все тут!
И прыгают дети тогда на лианы
И песни, качаясь, поют.

Качаются джунгли от шума и гама,
Когда забирают ребят.

И счастлива нянечка, зная, что мамы
Сегодня её не съедят.

НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД В НАТУРАЛЬНУЮ ВЕЛИЧИНУ

Пройдя мимо нескольких чисел, Алиса оглянулась и с удивлением обнаружила, что перед единицей появилось что-то круглое.

— Это *нуль*! — воскликнула Алиса. — Но как я не заметила его раньше?

Она повернула обратно, но, чем ближе к нулю она подходила, тем удивительнее он ей казался. Во-первых, сама его форма была странной — он почему-то был похож на яйцо. А во-вторых, Алиса ясно различила глаза, нос и рот!

— Да это же Шалтай-Болтай! — догадалась Алиса. И действительно, это был Шалтай-Болтай собственной персоной — он сидел на струне, скрестив по-турецки маленькие ножки. И Алиса начала тихонько напевать:

Шалтай-Болтай сидел на стене,
Шалтай-Болтай свалился во сне.
Вся королевская конница, вся королевская рать
Не может Шалтая,
Не может Болтая,
Шалтая-Болтая,
Болтая-Шалтая,
Шалтая-Болтая собрать![*]

— Ну уж если он *отсюда* свалится, его *вообще* никто не соберёт! — рассудила вслух Алиса.

— *«Никто»* не соберёт, а *кто-то* соберёт! — неожиданно заявил Шалтай-Болтай и покачнулся. — Это твоя четвёртая ошибка.

— Почему *четвёртая*? — опешила Алиса: такого начала разговора она никак не ожидала!

— Во-первых, ты приняла меня за нуль, — начал загибать пальцы Шалтай-Болтай. — А это, знаешь, не очень приятно, когда тебя принимают за нуль!

— Простите, пожалуйста, — сказала Алиса. — Я совсем не хотела вас обидеть. А какая моя *вторая* ошибка?

— Ты приняла нуль за *натуральное число*, — произнёс Шалтай-Болтай. — Разве ты не знала, что это *натуральный ряд*? — показал он на ряд светящихся чисел.

— Мне об этом сказал Чеширский Кот, — ответила Алиса. — Но что это значит, я ещё не знаю.

— Натуральный ряд состоит из натуральных чисел, — важно пояснил Шалтай-Болтай. — Это числа, которые получаются при счёте, а счёт обычно начинается с *единицы*.

— Я постараюсь это запомнить, — пообещала Алиса. — А какая моя *третья* ошибка?

— Ты забыла представиться! — упрекнул Шалтай-Болтай.

— Но ведь и вы не представились, — попыталась оправдаться Алиса.

— Ты же *знаешь*, как меня зовут, — возразил Шалтай-Болтай, — только что ты даже пела обо мне песню!

— Пожалуй, он прав, — подумала Алиса и сказала:

— Меня зовут Алиса.

— Ужасное имя! — скривился Шалтай-Болтай.

— Почему? — обиделась Алиса.

— Алис много, — объяснил Шалтай-Болтай. — Разве у тебя не бывало такого: слышишь «Алиса!», оборачиваешься, а зовут, оказывается, совсем не тебя?

— Бывало, — вспомнила Алиса.

— Это, наверное, было не очень приятно, — заметил Шалтай-Болтай. — А вот если *я* слышу «Шалтай-Болтай!», то знаю, что зовут именно меня, потому что я — единственный Шалтай-Болтай во всем мире! — и он попытался выпятить грудь ещё больше.

— Не могут же у всех людей быть разные имена, — возразила Алиса. — Людей очень много — на всех просто не хватит имён!

— А сколько всего людей? — поинтересовался Шалтай-Болтай.

— Я не знаю точно, — сказала Алиса, — но, кажется, больше миллиарда, а ведь миллиард — это тысяча миллионов...

— Разве это много? — пренебрежительно перебил Шалтай-Болтай. — *Вот что такое много*! — круто повернулся он в сторону натурального ряда. — Натуральных чисел *бесконечно много*, но среди них нет даже *двух* с одинаковыми именами!

— И правда, — поразилась Алиса, посмотрев на уходящий вдаль ряд чисел, — все числа здесь *разные*, а ведь у разных чисел и названия разные!

— Это потому, что числа себя уважают, — пояснил Шалтай-Болтай. — Каждое из них — чем-то особенное!

— Неужели *каждое*? — усомнилась Алиса. — А по-моему, числа, которые стоят рядом, очень похожи друг на друга...

— А вот и нет, — возразил Шалтай-Болтай, — ведь одно из них обязательно чётное, а другое — нечётное!

И в тот же миг все чётные числа стали оранжевыми, а

нечётные — голубыми. Алиса посмотрела на разноцветный ряд чисел — он стал ещё красивей, и ей захотелось, чтобы цветов стало больше.

— Хорошо, если бы здесь были все цвета радуги! — тихо сказала она, и по натуральному ряду сразу же побежала разноцветная волна: единица стала *красной*, двойка осталась *оранжевой*, тройка стала *жёлтой*, четвёрка — *зелёной*, пятёрка — осталась *голубой*, шестёрка — стала *синей*, семёрка — *фиолетовой*, — и снова: красное число, оранжевое, жёлтое...

— Как красиво! — невольно вырвалось у Алисы.

— Не только красиво, но и удобно, — одобрил Шалтай-Болтай. — Теперь сразу видно, какие числа делятся на семь!

— Действительно, — присмотревшись, согласилась Алиса. — Все такие числа — фиолетовые!

— Кстати о делении, — воскликнул Шалтай-Болтай. — Сейчас я покажу тебе особенно замечательное число! — с неожиданной легкостью он вскочил на ножки, взял Алису за руку, и они побежали по струне.

Вдруг Шалтай-Болтай так резко остановился, что Алиса чуть не столкнула его со струны.

— Вот! — показал он на число «60».

— Чем же это число замечательно? — поинтересовалась Алиса.

— Разве тебе не видно? — удивился Шалтай-Болтай. — Шестьдесят делится на один, на два, на три, на четыре, на пять, на шесть, на десять, на двенадцать, на пятнадцать, на двадцать, на тридцать и на шестьдесят!

— Это действительно замечательно, — согласилась Алиса. — Но разве это можно *увидеть*?

— Конечно, Можно! — сказал Шалтай-Болтай. — Представь, что у тебя шестьдесят солдатиков...

— Мне легче представить кукол, чем солдатиков, — заметила Алиса.

— Представляй, — согласился Шалтай-Болтай. — Но чтобы их было ровно шестьдесят!

И Алиса постаралась представить шестьдесят кукол — это было не так просто, потому что, представляя кукол, она должна была их считать!

Через минуту куклы уже кружились вокруг Алисы и Шалтая-Болтая.

— Ты уверена, что их шестьдесят? — спросил Шалтай-Болтай, уворачиваясь от кукол, которые налетали на него со всех сторон.

— Не очень, — призналась Алиса.

— А ну-ка, станьте в пары! — крикнул куклам Шалтай-

Болтай.

И хотя куклы не солдатики, они тут же выполнили приказание. Каждой кукле нашлась пара.

— Число кукол делится на *два*, — заключил Шалтай-Болтай. — Ты это видишь?

— Да, — подтвердила Алиса.

— А теперь возьмитесь за руки по три! — снова скомандовал Шалтай-Болтай.

Куклы опять послушались; и на этот раз «лишних» кукол тоже не осталось.

— Число кукол делится и на *три*! — воскликнула Алиса и приказала сама:

— Возьмитесь за руки по четыре!

Таким образом Алиса быстро проверила, что число кукол делится на четыре, на пять и на шесть; когда куклы взялись за руки по *шесть*, они образовали кружки, и Алиса легко пересчитала, что кружков как раз *десять*.

— Их ровно *шестьдесят* — теперь это *видно*! — воскликнула Алиса. — И то, что шестьдесят делится на два, на три, на четыре, на пять, на шесть и на десять, я тоже видела. Действительно, шестьдесят — замечательное число!

— А теперь посмотри на числа, которые стоят с ним рядом, — предложил Шалтай-Болтай. — Ни пятьдесят девять, ни шестьдесят один не делятся ни на одно число, кроме, конечно, единицы и самих себя.

— Значит, эти числа — ничем не замечательные? — спросила Алиса.

— Наоборот! — возразил Шалтай-Болтай. — Они как раз тем и замечательны, что делятся только на *два* числа — на единицу и само себя. Такие числа называются *простыми*.

— А как называются остальные числа? — поинтересовалась Алиса.

— Почти все остальные числа называются *составными*, — ответил Шалтай-Болтай. — Любое из них можно *составить*, умножая простые числа друг на друга: например, шесть — это два умножить на три, а шестьдесят — это два умножить на два, потом на три и еще на пять.

— Понятно, — сказала Алиса. — Но почему вы сказали «почти»? Разве есть числа, которые не простые и не составные?

— Есть, — загадочно произнёс Шалтай-Болтай. — Правда, такое число — одно-единственное!

— Какое? — заинтересовалась Алиса.

— Попробуй угадать, — ответил Шалтай-Болтай. — Мы сейчас мимо него пройдём: смотри внимательно! — И,

покачиваясь на тонких ножках, он пошёл по струне к началу натурального ряда.

Алиса последовала за ним, глядя на числа, мимо которых они проходили: какое же из них то единственное число, которое и не простое и не составное?

— Пятьдесят восемь? — думала Алиса. — Это число делится на два — значит, оно составное... Пятьдесят семь? Делится на три — составное... Пятьдесят шесть? Тоже делится на два... кстати, все чётные числа делятся на два, значит, все они составные — буду поэтому следить только за нечетными числами! Пятьдесят пять делится на пять — составное... Пятьдесят три... на что же оно делится? Кажется, ни на что! Может, это и есть то число, которое не простое и не составное? Ах нет, оно же делится на само себя и на единицу — значит, это простое число! Так ведь любое же число делится на себя и на единицу! И если оно ни на что больше не делится, то оно простое, а если делится, то составное! Неужели Шалтай-Болтай меня просто дурачит?

Пройдя мимо всех чисел, Шалтай-Болтай уселся на то место, где сидел вначале, когда Алиса приняла его за нуль. Сама Алиса остановилась рядом с ним, перед единицей.

— Ну что? — спросил Шалтай-Болтай. — Догадалась, какое число не простое и не составное?

— По-моему, такого числа нет, — решительно сказала Алиса. — Любое натуральное число либо простое, либо составное: если оно делится на какое-то другое число, то оно составное, а если не делится, то простое — ведь на единицу и само себя делится любое число!

— *И*! — воскликнул Шалтай-Болтай.

— Что «и»? — испугалась Алиса: она решила, что Шалтаю-Болтаю стало плохо.

— На единицу *и* само себя! — спокойно пояснил Шалтай-Болтай. — Любое простое число делится на *два* разных числа: единицу и само себя. Но есть такое число, которое делится только на *одно* число...

— Это единица! — догадалась Алиса, глядя на число, перед которым она как раз стояла.

— Ну что, ловко я тебя провёл? — с довольным видом спросил Шалтай-Болтай. — Но ты не огорчайся: зато теперь ты знаешь, что особенного в числе «один»! А вот скажи: что особенного в числе «два»?

— Это чётное число, — начала размышлять вслух Алиса, — но ведь чётных чисел много...

— Их *бесконечно много*, — заверил Шалтай-Болтай. — Ведь к

любому чётному числу можно прибавить два, и получится большее чётное число!

— Значит, в том, что два — чётное число, ничего особенного нет, — заключила Алиса, продолжая рассуждать вслух. — Кроме того, два — простое число, потому что оно делится на два *разных* числа — на само себя и на единицу... Но ведь простых чисел тоже, наверное, много?

— Давай посмотрим, — предложил Шалтай-Болтай, и ряд чисел померк: многие числа погасли. В начале ряда, например, светились только числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

— Это простые числа! — догадалась Алиса. — И конца им не видно...

— Не видно, — согласился Шалтай-Болтай. — А что *видно*?

— Видно, что некоторые простые числа стоят почти рядом, а между другими — большие промежутки... — заметила Алиса.

— У тебя неплохое зрение, — отметил Шалтай-Болтай. — А что тебе ещё видно?

— Чем дальше, тем промежутки становятся всё больше и больше, — присмотревшись, ответила Алиса, — поэтому кажется, что ряд простых чисел становится всё реже и реже...

— Это не только кажется, — отозвался Шалтай-Болтай. — Так оно и есть на самом деле. *Не наводит ли это тебя на какую-то мысль*?

— Наводит, — подумав, сказала Алиса. — Если простые числа встречаются всё реже и реже, значит, где-то они заканчиваются совсем?

— То есть, ты думаешь, что есть какое-то *самое большое простое число*? — уточнил Шалтай-Болтай.

— Так мне кажется, — осторожно ответила Алиса.

— А вот это тебе действительно только *кажется*! — обрадовался Шалтай-Болтай так сильно, что стал даже подскакивать на струне, то и дело рискуя свалиться с неё. — Я тебя снова провёл! Самого большого простого числа не существует, потому что простых чисел *бесконечно много*!

— Но откуда это известно? — возразила Алиса. — Ведь если к простому числу прибавить два, то совсем не обязательно получится снова простое число: например если к семи...

— С простыми числами не всё так просто! — перебил Шалтай-Болтай. — Хотя они и называются простыми, разобраться в них труднее всего! Но то, что их бесконечно много, доказать не так трудно. Это доказал еще Евклид...

— Евклид? — радостно воскликнула Алиса. — Я видела его...

— *Евклида*?! — поразился Шалтай-Болтай и с интересом посмотрел на Алису. — Тогда ты неплохо сохранилась!

— Я видела его портрет в учебнике математики, — объяснила Алиса. — Кажется, он был древним греком?

— Не таким уж он был и древним, — отозвался Шалтай-Болтай. — Он и до шестидесяти не дожил... Так ты поняла уже, что особенного в числе два?

— Ещё нет, — сказала Алиса. — Два — число чётное и простое... но ведь и тех и других чисел бесконечно много...

— Два — это *единственное* число, которое и чётное и простое *одновременно*! — торжественно произнёс Шалтай-Болтай, показывая на двойку. — Подумай только — единственное из бесконечно многих!

— А я уже было решила, что все чётные числа — составные! — призналась Алиса.

— Три — тоже особенное число, — важно заметил Шалтай-Болтай.

— Это единственное простое число, которое делится на три? — спросила Алиса.

— Не только, — ответил Шалтай-Болтай. — Три — единственное натуральное число, равное сумме всех предыдущих натуральных чисел! И ещё: посмотри на эти два числа, — показал он на двойку и тройку.

— Это единственные простые числа, которые стоят *рядом*! — воскликнула Алиса.

В этот момент все числа в натуральном ряду зажглись снова, и Алиса обратила внимание на появившуюся четвёрку.

— Четыре — тоже замечательное число! — тут же сказала Алиса. — Ведь это *первое составное* число!

— Мало этого, — подхватил Шалтай-Болтай. — Ты заметила, что четыре — это дважды два и в то же время — два плюс два?

— Что же тут особенного? — спросила Алиса.

— Как? —воскликнул Шалтай-Болтай. — Ты берёшь два одинаковых числа, один раз умножаешь их, а другой раз складываешь — но получаешь *одно и то же*! Разве это не удивительно?

— Удивительно, — согласилась Алиса. — Но разве так получается только для четырёх?

— Только! — радостно подтвердил Шалтай-Болтай.

— А что замечательного в числе *пять*? — спросила Алиса: она уже поверила, что каждое натуральное число и правда чем-то замечательно. Ей показалось даже, что числа в натуральном ряду ожили — каждое число превратилось в живое существо!

Шалтай-Болтай не ответил на вопрос Алисы. Она взглянула на него и увидела, что он начал засыпать. В голове у Алисы вихрем пронеслась строка из песенки: «Шалтай-Болтай свалился

во сне»!

— Не засыпайте! — крикнула Алиса и бросилась к Шалтаю-Болтаю. Но не успела: Шалтай-Болтай покачнулся во сне и... свалился со струны!

Алиса посмотрела вслед Шалтаю-Болтаю — он летел, медленно вращаясь в полете.

— Вся королевская конница и вся королевская рать *не сможет* Шалтая-Болтая собрать! — вспомнила Алиса и, оттолкнувшись от струны, полетела за Шалтаем-Болтаем.

БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД ЗАГАДОК

В игру *«Кто назовёт самое большое число?»* сегодня играют только дети, но было время, когда этим увлекались величайшие мудрецы. В индийской легенде рассказывается, как наставник обучал юного Будду:

«И сказал Висвамитра:

— Перейдем к числам. Считай, повторяя за мной, пока не дойдём до ста тысяч: один, два, три, четыре... затем десятки, сотни и тысячи.

И назвал отрок вслед за наставником единицы, десятки, сотни, но не остановился на сотне тысяч; нет, он шептал дальше до тех чисел, которыми можно считать всё, начиная от зёрен в поле... Потом он перешёл к счёту звёзд ночных, капель в море, и далее к счёту песчинок великой реки Ганг, и к счёту песчинок в миллионах таких рек... Затем пошли ещё более громадные числа... и, наконец, число, при помощи которого боги вычисляют свое прошедшее и будущее...»

В этой прекрасной легенде есть очень важное слово — *«наконец»*! Как бы ни был искусен в счёте Будда, он всё-таки считал, что *самое большое число существует*! Правда, число это и по нашим сегодняшним меркам очень большое: в другой легенде о Будде говорится, что оно изображается единицей с 54-мя нулями. Как видите, фантазии у Будды хватало.

Так выглядят Будда и его огромное число. Записать это число не так уж сложно, но представить невозможно: оно намного больше, чем число атомов во всем земном шаре!

И всё-таки его намного превзошёл древнегреческий учёный Архимед. Он написал книгу, которая называется: «Исчисление песчинок». Посвящена эта книга царю, который правил тогда в Сиракузах, городе, где жил Архимед. Вот как начинается книга Архимеда:

«Многие думают, государь, что число песчинок бесконечно. Я говорю не только о песке кругом Сиракуз и во всей Сицилии, но о песке на всей суше, как обитаемой, так и необитаемой. Другие не считают это число бесконечным, но думают, что назвать такое число невозможно.

Я же постараюсь показать тебе, что можно назвать числа, намного превосходящие не только число песчинок в песчаной куче размером со всю Землю, но даже число песчинок, нужное для того, чтобы наполнить песком всю Вселенную...»

Архимед считал Вселенную не бесконечной, но всё-таки довольно большой: в сто миллионов раз больше Земли. И вот, по расчётам Архимеда, в такой Вселенной уместилось бы количество песчинок, равное числу с 63-мя цифрами. Казалось бы, это почти то же самое, что и «число Будды», но на самом деле оно в миллиард раз больше!

Однако Архимед не остановился на этом числе: он придумал названия для чисел, которые записываются с помощью

восьмидесяти миллионов миллиардов нулей! Тут уж не только само число, но даже *запись* числа представить трудно. И все же попробуем. Предположим, что это число записано цифрами размером в один сантиметр, вот так:

Если бы Архимед, назвав своё число, сразу же сел в космический корабль и полетел на нём вдоль записи этого числа, то до конца записи он долетел бы как раз к нашему времени — лететь ему пришлось бы больше двух тысяч лет!

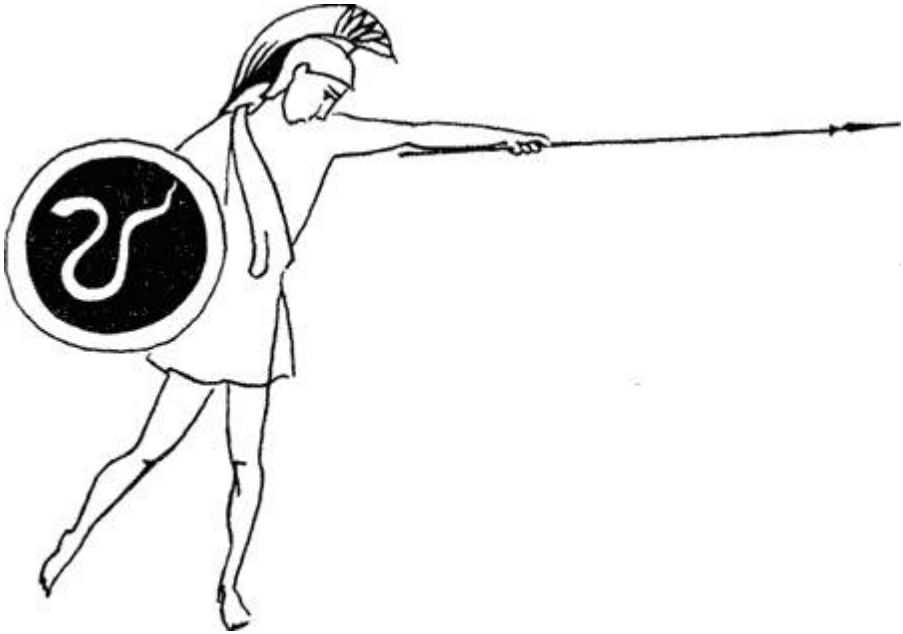
Однако Архимед не мог бы даже *начать* записывать это число: ведь он не знал индийских (арабских) цифр. Но он смог такое число *назвать*! Вот это название: мириада мириад мириадо-мириадных чисел мириадомириадного периода. Название, конечно, длинновато, но во сколько раз оно короче записи!

Но самое главное даже не в том, что Архимед смог назвать число, которое намного превосходит потребности даже современной науки. Главное в том, что он впервые ясно высказал идею о *бесконечности* натурального ряда — это, может быть, самая смелая «выдумка» за всю человеческую историю!

Поразив воображение древних греков, идея бесконечности стала с тех пор одной из главных во всей математике. Вот что пишут об этом самые крупные математики двадцатого столетия — немецкий учёный Гильберт и французский учёный Пуанкаре.

Гильберт: «Ни одна проблема не волновала так глубоко человеческую душу, как проблема бесконечности...»

Пуанкаре: «Если кто-нибудь захочет кратким и выразительным словом определить само существо математики, тот должен сказать, что математика — это наука о бесконечности».

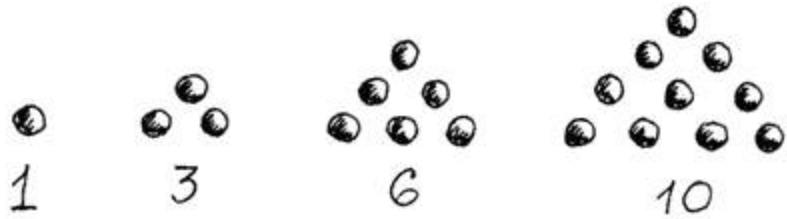


Один древнегреческий учёный так выразил идею бесконечности: «где бы ни стал воин, он всегда сможет протянуть свое копье *еще дальше*»

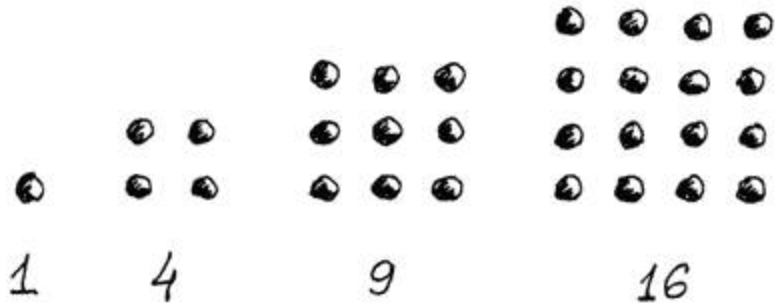
Первыми начали изучать свойства натуральных чисел индийцы и греки — они заметили, что каждое натуральное число чем-то замечательно и не похоже на другие числа. Изменение всего-навсего на единицу меняет многие свойства числа — например, соседние числа никогда не делятся на одно и то же число. В древности были открыты и признаки делимости чисел (кстати, семь — единственное число из первого десятка, для которого нет удобного признака делимости — потому-то Шалтай-Болтай и похвалил Алису за расцвечивание натурального ряда всеми цветами радуги!).

То, что в воображаемом мире чисел существуют свои законы (например, сумма двух нечётных чисел — всегда чётное число!), навело учёных на мысль, что законы *чисел* могут быть связаны с закономерностями в *окружающем мире*. И действительно, древнегреческий учёный Пифагор, который жил в VI веке до нашей эры, открыл удивительную связь между законами чисел и законами музыки: например, если уменьшить длину струны или флейты *вдвое*, тон звука повышается точно *на одну октаву*. Это произвело на Пифагора такое впечатление, что он провозгласил: «число есть начало всех вещей».

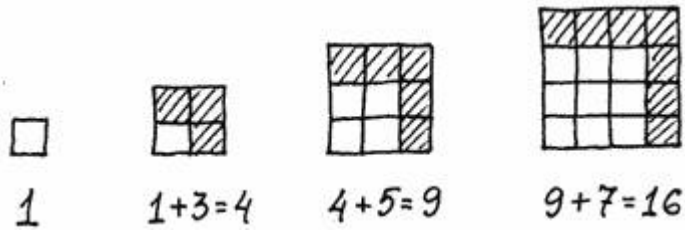
Пифагор установил и первую связь между числами и фигурами: он ввел «треугольные» и «квадратные» числа.



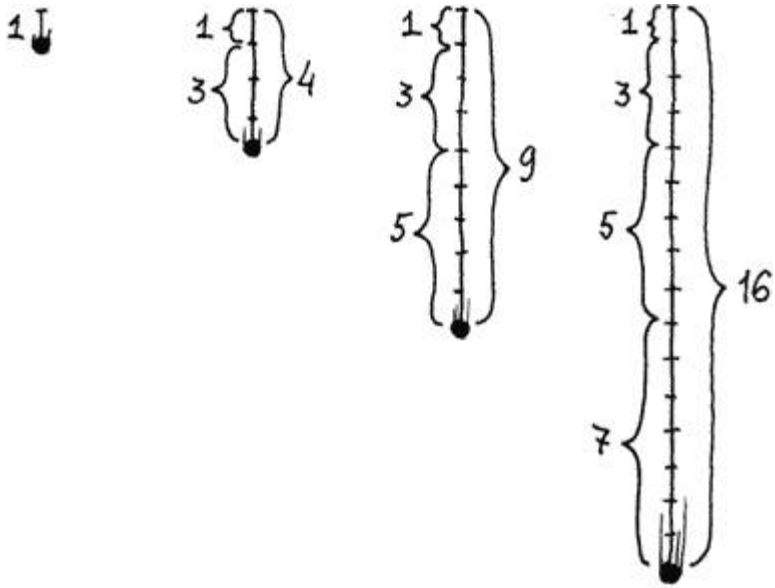
Древние греки любили изображать числа камешками, раскладывая их на морском берегу. Так, например, они выкладывали «треугольные» числа. Как вы думаете, какие следующие «треугольные» числа?



Так выглядят «квадратные» числа. Мы и сейчас называем их «квадратами» — например, мы говорим: четыре в квадрате — шестнадцать. Какие следующие «квадратные» числа?



Пифагор обнаружил интересную связь между нечётными числами и «квадратными»: сумма последовательных нечётных чисел, начиная с единицы, обязательно будет «квадратным» числом! Например, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16 и так далее. На этом рисунке видно, как нечётное число, «пристраиваясь» к «квадратному», превращает его в следующее «квадратное» число



Прошло две тысячи лет после того, как Пифагор открыл связь между нечётными и «квадратными» числами, и это открытие помогло Галилею открыть один из важнейших законов природы. Когда Галилей изучал падение тел, он заметил, что путь, пройденный падающим телом за вторую секунду, *втрое* больше, чем за первую секунду, а путь, пройденный за третью секунду, в *пять* раз больше, чем за первую, и так далее. Отсюда Галилей сделал вывод, что путь прямо пропорционален *квадрату* времени движения — так и был открыт закон падения тел

НЕБЫЛИЦА ОБ АРХИМЕДЕ, КОТОРЫЙ ПЕРВЫМ ДОГАДАЛСЯ, ЧТО СЧИТАТЬ МОЖНО БЕЗ КОНЦА

Решив однажды ночь не спать,
Великий Архимед
Задумал звёзды сосчитать —
Но наступил рассвет.

Загадку счёта разгадать
Немедленно решив,
Он капли в море стал считать —
Но начался отлив.

Тогда он тяжело вздохнул,
Потёр себе висок,
И, притащив трехногий стул,
Он сел считать песок.

Сидел, считал, кряхтел, сопел,
И много насчитал,
Но ветер с моря налетел —
И весь песок смешал.

— Считать я буду просто вслух! —
Мудрец в сердцах решил.
Он громко досчитал до двух —
И сон его сморил.

КАК ДЕЛИТЬ И КАК ДЕЛИТЬСЯ

Летя в межзвёздном пространстве, Алиса чувствовала себя как на мягкой-мягкой (бесконечно мягкой!) перине. Глаза её начинали слипаться, и она заснула.

Когда Алиса проснулась, всё вокруг изменилось до неузнаваемости: небо было уже не звёздным, а голубым, и на нем ярко сияло солнце. Купаться в солнечных лучах было очень приятно — оказалось, что Алиса порядком озябла в межзвёздном пространстве. Вдруг она вспомнила, что летит вслед за Шалтаем-Болтаем, повернула голову и увидела, что падает на город с островерхими башнями! Впереди неё падал Шалтай-Болтай — он всё так же медленно вращался и, кажется, спал.

Город был ещё далеко, и башни казались игрушечными, но они росли прямо на глазах. Алиса различила шпили на башнях и вся съёжилась. Однако скоро стало ясно, что они с Шалтаем-Болтаем падают на городскую площадь, посреди которой бьёт фонтан.

— Что же с нами будет? — в тревоге подумала Алиса, и в тот же миг Шалтай-Болтай упал на площадь и разбился. Скорлупа разлетелась на мелкие кусочки, но желток сохранился в целости.

— Если я упаду на него, то разобью его совсем! — мелькнуло в голове у Алисы.

Она закрыла глаза и изо всех сил пожелала, чтобы она не добила Шалтая-Болтая и не разбилась сама. В ту же секунду она всем телом ощутила упругую прохладу — ей показалось, что она упала на мокрый диван. Открыв глаза, Алиса обнаружила, что покачивается на вершине струи фонтана. Внизу, возле самого фонтана, в обломках скорлупы лежал Шалтай-Болтай.

Алиса соскользнула по струе и бросилась к Шалтаю-Болтаю. Желток всё ещё подрагивал после удара.

— Он жив! — обрадовалась Алиса. — Но как же его собрать?

Она огляделась: кусочки скорлупы были разбросаны по всей площади.

В этот момент на площадь выбежали два воина.

— Это, наверное, королевская рать, — догадалась Алиса. — Но неужели это *вся* рать? А где же конница?

И тут на площадь вылетел всадник.

— *Половина* моя! — крикнул всадник воинам, осаживая коня перед самым Шалтаем-Болтаем. — Вам и по *четверти* хватит!

— Конница у короля тоже не очень большая, — подумала Алиса. — Но они, кажется, хотят не *собирать* Шалтая-Болтая, а *разбирать*!

Она хотела уже вмешаться, но вдруг воины и всадник замерли: послышалась барабанная дробь. Алиса оглянулась и увидела, что по одной из улиц к площади приближается целое войско. Впереди шли полковые музыканты, а перед музыкантами на белом коне ехал шахматный Белый Король.

Слева от Короля величественно ступал Лев, а справа вразвалочку шёл Единорог. Алиса вспомнила песенку:

Вёл за корону смертный бой со Львом Единорог.
Гонял Единорога Лев вдоль городских дорог,
Кто подавал им чёрный хлеб, а кто давал пирог,
А после их под барабан прогнали за порог...*

Через несколько минут конница и рать заполнили всю площадь.

— Бедные скорлупки! — с жалостью подумала Алиса. — От них, наверное, остались одни крошки...

Она охраняла желток, но толпа всё напирала и напирала.

— Стойте! — изо всех сил крикнула Алиса.

Воины сразу остановились, а Белый Король посмотрел на Алису с изумлением.

— Ты кто такая? — спросил он.

Алиса вежливо представилась и даже сделала реверанс.

— Тебя здесь быть не должно, — решительно заявил Король, — в песне поётся только о Шалтае-Болтае, королевской коннице и королевской рати. Никакой Алисы в песне нет!

— В песне нет, а здесь я есть! — возразила Алиса, загораживая Шалтая-Болтая.

— Его должна собирать королевская конница и королевская рать! — показал Король на Шалтая-Болтая. — Причем *вся*! — крикнул он, обращаясь к своим воинам, и те в ответ загудели. Толпа снова начала напирать.

— Назад! — отчаянно закричала Алиса. — Если уж на то пошло, — обратилась она к Королю, — то в песне поётся, что вся королевская конница и вся королевская рать *не сможет* Шалтая-Болтая собрать!

— А ведь и правда, — удивился Король и оглянулся. — Неужели у меня такое маленькое войско?

— Оно, наоборот, слишком большое, — сказала Алиса. — Всадников и воинов много, а Шалтай-Болтай — один!

— Ну и что? — возразил Король. — Единица делится на любое число!

— Единица делится только на единицу! — заявила Алиса. — И поэтому собирать Шалтая-Болтая должна я одна.

Тогда Белый Король полез в карман, вытащил платок с королевским вензелем и помахал им перед Алисой.

— Этот платок *один*? — спросил он.

— Один, — подтвердила Алиса, и Король одним движением разорвал платок пополам.

— Вот я и *разделил один на два*, — сказал Король, держа в каждой руке по половинке платка. — Можно делить и дальше, — добавил он и разорвал пополам половинки.

— Хватит, — остановила его Алиса. — Я поняла.

— Ты, наверное, знакома пока только с натуральными числами, —предположил Король, раскладывая по карманам четвертушки платка. — Надо бы познакомить тебя и с *дробными*... Где Лев и Единорог? — неожиданно обернулся он.

— Мы здесь, — выбрались из толпы Лев и Единорог.

— Вот вам два яблока на троих, — сказал Король, вынимая из кармана мантии два больших красных яблока и протягивая их Алисе. — Разделите!

— Мне — *львиную долю*! — тут же предложил Лев.

— А что это значит? — поинтересовалась Алиса, держа в каждой руке по яблоку.

— Половина яблока полагается мне как царю зверей, — начал объяснять Лев, — ещё половину должна получить моя жена-львица, и половина яблока причитается моим львятам...

— Всем львятам — только пол-яблока? — не удержалась Алиса. — По сколько же достанется каждому?

— Это неизвестно, — пожал плечами Лев. — Ведь одни львята сильнее, а другие слабее...

— А кому, по-твоему, должна достаться *последняя* половина яблока? — перебил его Король.

— За неё я готов вести смертный бой с кем угодно! — заявил Лев, и Единорог вытащил руки из карманов.

— Твой способ деления мне не очень нравится, — сказал Король, обращаясь ко Льву. — Я хотел бы, чтобы вы разделили эти яблоки *поровну*.

— Поровну я делить не умею, — извиняющимся тоном сказал Лев. — Как-то не приходилось...

— Можно очень просто разделить эти яблоки так, чтобы *они* получили поровну, — неожиданно произнёс Единорог, показывая на Льва и на Алису.

— Как? — заинтересовался Король.

— Надо отдать *оба* яблока *мне*! — ответил Единорог.

— Этот способ слишком прост, — заметил Король. — Я хочу, чтобы вы *все* получили поровну!

— Давайте я попробую разделить яблоки, — предложила

Алиса. — Только мне нужен нож.

Король вынул из кармана мантии перочинный ножик, раскрыл его и протянул Алисе.

— Если бы у нас было *одно* яблоко на *троих*, каждому досталась бы *одна третья часть* яблока, — рассудила Алиса.

Она разрезала одно яблоко на три равные части и дала Льву и Единорогу по одной трети.

— А теперь разделим так же и второе яблоко... — и она протянула Льву и Единорогу ещё по одной трети яблока.

— Ну вот, *делить два на три* ты уже умеешь, — сказал Король. — Получается каждому по *две трети*...

— Каждому не получается, — возразил Лев, возвращая Алисе свои две трети яблока. — Деление поровну наводит на меня тоску!

— Вы же были готовы вести смертный бой за *половину* яблока, — удивилась Алиса. — А две трети — это, кажется, больше, чем половина?

— Больше, — подтвердил Король. — Я вижу, ты уже поняла, что такое дробные числа.

— Ещё не совсем, — честно призналась Алиса.

— Ты просто ещё не поняла, что уже поняла, — объяснил Король. — *Половина, четверть, одна треть, две трети, одна шестая* — это все *дробные* числа.

— Благодаря этим числам ты можешь делить теперь любое число на любое, — небрежно заметил Единорог.

— Не на *любое*, — вмешался вдруг Лев. — Вот тут уж я действительно готов вести смертный бой!

— Не надо, старина, — остановил его Единорог. — Ты прав: *нельзя делить на нуль*!

— Даже если очень захочется, — добавил Лев.

— Я не буду делить на нуль, — пообещала Алиса. — А на все остальные числа делить можно?

— Можно, — ответил Король.

— Делить *можно*, а делиться *нужно*! — заметил Единорог и выразительно посмотрел на «львиные» две трети яблока в руках у Алисы.

Алиса протянула Единорогу одну треть яблока и с беспокойством посмотрела на Шалтая-Болтая.

— Его надо поскорее собрать! — озабоченно сказала она.

— Сейчас мы соберём его все вместе! — воскликнул Король. — Раз единицу можно делить на сколько угодно частей, работа найдётся каждому...

— Не надо делить Шалтая-Болтая на сколько угодно частей! — взмолилась Алиса. — Давайте я соберу его сама.

— Хорошо, — подумав, согласился Король. — И за это ты получишь награду!

— Не нужна мне никакая награда, — сказала Алиса, — пусть только ваши воины уйдут с площади, чтобы я могла собрать Шалтая-Болтая!

— От королевских наград не отказываются! — обиженно заявил Король.

— А какая награда? — поинтересовалась Алиса.

— Большой шоколадный торт с орехами, — торжественно произнёс Король.

— От такой награды отказаться трудно! — признала Алиса.

— Только давай так, — сказал Король, — если ты сама не сможешь собрать Шалтая-Болтая, тогда *ты* мне дашь шоколадный торт!

— Где же я его возьму? — развела руками Алиса.

— Где хочешь, — сказал Король. — Иначе я не согласен.

— Что же делать? — с тревогой подумала Алиса. — Они вот-вот растопчут бедного Шалтая-Болтая!

— Хорошо, я согласна! — решилась она.

Король подал знак, но на площади скопилось так много воинов, что они не могли развернуться, и поэтому им пришлось уходить задом-наперёд. Из-за этого Алисе показалось, будто время потекло вспять.

— Вот если бы всё так и шло в обратном порядке до того момента, когда Шалтай-Болтай был ещё цел! — подумала она. — Но только побыстрее...

И сразу же движение воинов ускорилось; через минуту войско, пятясь, замаршировало по улице; за войском, тоже задом-наперёд, гордо шли барабанщики с высоко поднятыми головами — барабанная дробь слилась в сплошной треск. За барабанщиками бегом пятились Лев и Единорог, а последним ехал Белый Король: он величественно держался в седле, а конь его бежал задом-наперёд, перебирая стройными ногами.

Не успела Алиса опомниться, как площадь опустела — возле Шалтая-Болтая остались только всадник и те два воина, которые появились первыми. Всадник что-то пискнул на непонятном языке («в его словах все звуки тоже наоборот!» — догадалась Алиса), и, двигаясь задом-наперед, всадник и воины умчались с площади.

В следующую секунду неведомая сила потащила Алису в бассейн, окунула в воду и подбросила на вершину струи фонтана. Ещё мгновение — и Алиса, совершенно сухая, взлетела со струи вверх и стала подниматься все выше и выше.

Сверху она увидела, как со всей площади к Шалтаю-Болтаю начали слетаться кусочки скорлупы, и вот уже он, целый и

невредимый (и даже спящий!) полетел вверх, вслед за Алисой.

— Стоп! — крикнула Алиса. — Теперь снова вниз, но пусть никто из нас не разобьётся!

На этот раз оба — Шалтай-Болтай и Алиса — упали в фонтан: Шалтай-Болтай попал на струю, а Алиса упала в бассейн.

— Где я?! — завопил Шалтай-Болтай, сразу проснувшись.

— Прыгайте в бассейн! — крикнула снизу Алиса. — Вы не разобьётесь!

Шалтай-Болтай прокатился по верхушке струи и плюхнулся вниз, подняв тучу брызг. Алиса схватила его за руку, и они выбрались из воды.

Посмотрев в ту сторону, куда ушла королевская рать, Алиса увидела Короля. На этот раз он шёл пешком, а за ним в две шеренги по четыре в ряд вышагивали поварята в больших белых колпаках.

— Теперь у Короля совсем другая рать, — подумала Алиса.

Король подошел к Шалтаю-Болтаю и внимательно его осмотрел. Тот, скосив глаза, с подозрением следил за Королём.

— Ни одной трещинки! — произнёс, наконец, Король и дружески похлопал Шалтая-Болтая по плечу *(или по щеке?)*.

Неизвестно, понравилось это Шалтаю-Болтаю или нет, но он тут же побежал к стене, идущей вдоль одной стороны площади, и, высоко подпрыгнув, уселся на стене, скрестив ножки по-турецки.

— Неплохо, — одобрительно отозвался Король, проследив взглядом за Шалтаем-Болтаем.

Алиса тоже посмотрела в ту сторону, и ей бросилось в глаза, что стена увита плющом с огромными листьями — листья были в половину её роста. А, кроме того, она увидела, что Шалтай-Болтай превратился в нуль!

— А где же другие числа? — почему-то подумала Алиса и тут же увидела их: справа от нуля вдоль стены на равных расстояниях друг от друга стояли красивые цифры 1, 2, 3, 4... — Алиса сразу узнала натуральный ряд!

А посмотрев вдоль стены влево, Алиса увидела те же числа. Но они стояли *в обратном порядке*, причем перед каждым числом почему-то стоял знак «минус»!

— Этими числами размечена дорога для королевских прогулок, — объяснил Король. — Дорога идёт вдоль стены, и расстояние между соседними числами равно как раз одному королевскому шагу. — Он повернулся к поварятам и приказал:

— Бегом на кухню, испеките торт и принесите его к «минус тысяче»! Но имейте в виду: этот торт — *королевская награда*, — со значением добавил он.

— К *«минус тысяче»*? — удивилась Алиса. — Что бы это

значило?

Однако поварята всё поняли: они мигом развернулись и, обгоняя друг друга, умчались.

— Давай прогуляемся в ожидании торта, — предложил Король. — Заодно нагуляешь аппетит.

— Для торта у меня всегда есть аппетит, — призналась Алиса.

— Для такого торта, какой тебе принесут, аппетит нужен особый, — заверил Король, подал Алисе руку и повёл её по дороге для королевских прогулок *вправо* от нуля.

КОГДА ЧЕЛОВЕК ПОБЕДИЛ ДРОБИ

Лет триста назад дроби считались вершиной премудрости: правилам действий с дробями обучали не в школах, а в университетах! Даже сами учёные находили эти правила весьма странными — один итальянский учёный писал: «Как получается, что *умножение* на дробь приводит к *уменьшению*? Ведь *умножение* должно всегда *увеличивать!*».

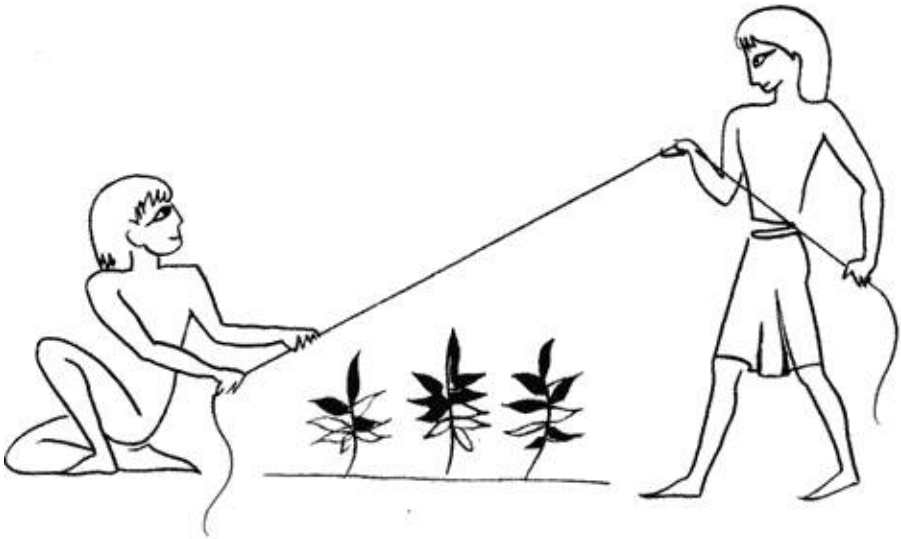
Что же заставило заняться «укрощением» дробей — делом, которое растянулось на тысячелетия?

У немцев до сих пор сохранилась поговорка «попал в дроби» — это значит: человек попал в такое положение, что ему не позавидуешь

Первым «упражнением на дроби» был делёж охотничьей добычи: убитого медведя или мамонта надо было разделить на всех членов племени. При этом, конечно, не всегда удавалось разделить на равные части! Отголосок тех времён сохранился и в нашем языке: когда мы делим что-то на две неравные части, мы иногда говорим «*большая* половина» и «*меньшая* половина», не замечая даже, что *половина* не может быть «большей» или «меньшей»!

Со временем, однако, появилась потребность делить и на *равные* части — например, зерно или поле для посева. И тогда появились дроби: одна вторая, одна треть, одна четвёртая и так

далее — такие дроби называются *основными*.

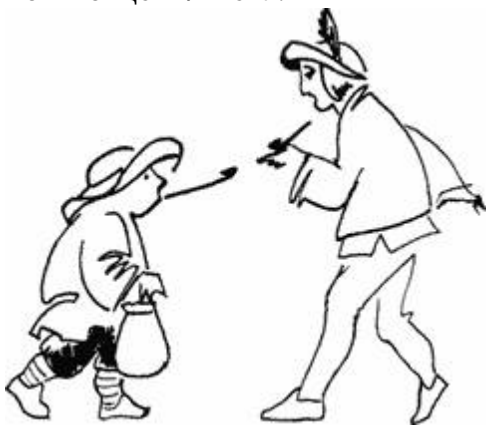


Другой причиной появления дробей была потребность в *измерениях*. Чтобы делить поле на участки, обменивать зерно и ткани или следить за временем, надо было научиться измерять площадь, объём, длину, время. Однако в результате измерения не всегда получалось натуральное число: часто приходилось учитывать и *части* меры — половину, четверть, одну шестую и так далее

При измерениях важно *сравнивать* величины, а для этого основные дроби совсем не подходят: попробуйте, например, сразу сказать, что больше — одна вторая плюс одна двенадцатая или одна треть плюс одна четверть?

Намного удобнее было бы, конечно, использовать при измерениях *одни и те же части* и указывать, сколько таких частей надо взять: например, сразу ясно, что двадцать три шестидесятых меньше, чем двадцать пять шестидесятых. И можно даже сразу сказать, *на сколько* меньше — ровно на две шестидесятых! Мы не случайно взяли *шестидесятые* части: первыми делить на одинаковые доли догадались древние вавилоняне, которые считали не десятками, а «шестидесятками», поэтому и доли у них были шестидесятые. А когда деления на шестьдесят частей было недостаточно, одну шестидесятую часть делили ещё на шестьдесят частей — получались «три тысячи шестисотые» части. Вам это ничего не напоминает? Тогда взгляните на часы: каждый час разделен на шестьдесят минут, а каждая минута — на шестьдесят секунд! Это привет от вавилонян, которых давно уже нет!

Вавилонские дроби оказались очень удобными для научных измерений (особенно в астрономии), и этими дробями европейские учёные пользовались даже в эпоху Возрождения: натуральные числа записывались в десятиричной системе — так же, как мы это делаем сегодня, а дроби всё ещё оставались «шестидесятиричными»! Казалось бы, надо сделать всего один шаг, чтобы перейти от шестидесятых и «три тысячи шестисотых» долей к десятым и сотым долям, но этот шаг оказался почему-то очень трудным: десятичные дроби ввёл арабский математик ал-Каши только в XV веке. Однако и тогда эти дроби до Европы не добрались — их ввёл в употребление голландский учёный Стевин только в конце XVI века!



Меры в старину отличались удивительным разнообразием! Скажем, расстояние между деревнями измерялось иногда в курительных трубках: сколько можно выкурить трубок, идя от одной деревни до другой. А в Англии долгое время использовалась мера длины «ярд» — эта мера была установлена указом короля Генриха I и равнялась расстоянию от кончика носа

короля до конца среднего пальца его вытянутой руки. Это была очень удобная мера: для проверки ее правильности достаточно было просто позвать короля и попросить его вытянуть руку!

Сегодня мы пользуемся главным образом десятичными дробями, чаще всего — в виде процентов. Слово «процент» происходит от латинского слова «центум» (сто): один процент — это одна сотая часть.

Об отношении древних греков к дробям стоит сказать особо: здесь, как и во многом другом, греки оказались непохожими на других. Греческие купцы и строители пользовались дробями вовсю — как без дробей торговать и строить? А вот учёные дробей не признавали! Греческий учёный Платон, который жил в IV веке до нашей эры, писал: «Если ты захочешь делить единицу, математики высмеют тебя и не позволят это делать».

Как ни странно, причиной такого удивительного непризнания дробей был именно высокий уровень греческой математики: греки считали математику наукой строгой и точной, а дроби представлялись им чем-то приближенным, неточным, и, значит, недостойным настоящего учёного. Единственное исключение сделали для музыки: когда Пифагор создал первую теорию музыки, он связал основные гармонические интервалы — октаву, квинту и кварту с дробями — одной второй, двумя третями и тремя четвертями.

И только Архимед, который много занимался практическими приложениями математики (например, он строил боевые машины для защиты Сиракуз от римлян), решился нарушить запрет на использование дробей в «чистой» науке. При этом он сразу ввёл в употребление дроби *общего* вида — такие, как пять девятых или двадцать две седьмых, то есть *любое* число *любых* долей.

Через шестьсот лет после Архимеда другой греческий математик, Диофант, впервые стал рассматривать дроби как *числа*, а не как доли какого-то предмета или меры. Однако и после Диофанта прошло ещё больше тысячи лет, прежде чем учёные начали изучать дробные числа «сами по себе».

Так произошло первое увеличение «семьи чисел»: к натуральным числам присоединились дробные. С тех пор продолжают появляться всё новые и новые числа и, пока на свете существуют математики, конца новым числам не будет!

НЕБЫЛИЦА О САДЕ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ, КОТОРЫЙ НАЗЫВАЛСЯ АКАДЕМИЕЙ

В Древней Греции когда-то
Был довольно странный сад:
Почему-то не пускали
В этот странный сад ребят!

Там, гуляя по аллеям,
Мудрецами окружён,
Рассуждал о мирозданьи
Их учитель, сам Платон.

Больше двух тысячелетий
С той поры прошло, и вот
Академий стало много —
Им давно утерян счёт.

Но, как прежде, не пускают
В академии детей,
Потому там не бывает
Неожиданных затей,

Ни в одной из академий
Нет весёлых сорванцов,
Ну а в некоторых даже...
Не увидишь мудрецов.

КОРОЛЕВСКАЯ ПРОГУЛКА

— А если бы я не собрала Шалтая-Болтая? — спросила Алиса, когда они с Белым Королём пошли по дороге для королевских прогулок. — Ведь я не смогла бы дать вам торт: у меня ничего нет!

— Ну что ж, — пожал плечами Король, — значит, у тебя стало бы тогда ещё меньше, чем ничего!

— Но разве бывает *меньше, чем ничего*? — удивилась Алиса.

— Конечно, бывает, — сказал Король. — Например, если ты кому-то должна, у тебя ведь меньше чем ничего, правда?

— Правда, — согласилась Алиса.

— Вот ты и была бы *должна* мне один торт. Можно сказать, — добавил Король, — что у тебя тогда стал бы *минус один* торт.

— Минус один? — переспросила Алиса.

— Это число, которое на единицу меньше нуля, — пояснил Король.

— Но разве бывают числа меньше нуля? — ещё больше удивилась Алиса.

— Сколько угодно, — охотно отозвался Король. — Берёшь любое число, большее нуля, скажем, пять, отнимаешь его от нуля — и, пожалуйста — получаешь «минус пять», число, которое на пять меньше нуля! У таких чисел и название есть — *отрицательные* числа.

— А как называются числа, которые больше нуля? — спросила Алиса.

— *Положительные*, — ответил Король.

— Значит, отрицательных чисел столько же, сколько положительных? — догадалась Алиса.

— *Ровно столько же*, — подтвердил Король. — И тех и других бесконечно много!

— А сам нуль — какое число, положительное или отрицательное? — спросила Алиса.

— Нуль — единственное число, которое не положительное и не отрицательное, — сказал Король.

— Так вот почему Шалтай-Болтай согласился теперь быть нулём! — подумала Алиса. — Он ведь так любит быть единственным в своём роде! Но зачем нужно так много отрицательных чисел? — снова спросила она. — Неужели только для долгов?

— Ты, наверное, думаешь, что число может отвечать только на вопрос *«сколько?»* — предположил Король.

— А на какой же ещё? — удивилась Алиса.

— Если я тебя спрошу, *где* мы сейчас находимся, что ты ответишь? — поинтересовался Король.

Алиса посмотрела по сторонам в поисках какой-нибудь приметы и обратила внимание, что они с Королём как раз проходят мимо числа «сто».

— Я бы сказала, что мы находимся на дороге для королевских прогулок возле числа «сто», — ответила Алиса.

— Ну вот, ты сама и ответила *числом* на вопрос *«где?»*! — воскликнул Король.

— Но ведь это число тоже отвечает на вопрос «сколько?» — возразила Алиса. — Оно говорит, сколько шагов вы сделали, отойдя от нуля.

— Дорога для королевских прогулок идёт от нуля в *две* стороны, — заметил Король. — Мы с тобой пошли *вправо*, но ведь могли пойти и *влево*! Однако если бы я прошёл сто шагов влево от нуля, разве я был бы там, где нахожусь сейчас?

— Конечно, нет! — сказала Алиса. — Вы были бы... — она секунду подумала, — вы были бы за двести шагов отсюда.

— Правильно, — отозвался Король. — Так вот: число «сто» говорит не только о том, *сколько* шагов я сделал, отойдя от нуля, но и *в какую сторону я* шел! Ведь «сто» — *положительное* число, а все положительные числа расположены *справа от нуля*.

— А сто шагов *влево* от нуля — это будет «*минус* сто»? — догадалась Алиса.

— Конечно, — подтвердил Король. — «Сто» и «минус сто» называют *противоположными* числами: они расположены на равных расстояниях от нуля, но с противоположных сторон.

— Так почему бы не говорить просто «сто шагов влево от нуля» или «сто шагов вправо от нуля»? — спросила Алиса. — По-моему, это было бы понятнее.

— Но зато не так удобно, — возразил Король. — Сейчас дорога размечена так, что когда идёшь *вправо*, числа всегда *увеличиваются*, а когда идёшь *влево — уменьшаются*!

— Даже если идти влево от *нуля*? — спросила Алиса. — Ведь тогда после числа «минус один» будет число «минус два»...

— Ты, наверное, забыла, что «минус два» на единицу *меньше*, чем «минус один», — напомнил Король.

— Действительно, забыла, — призналась Алиса. — Но почему мы идём всё дальше и дальше *вправо* от нуля, если торт принесут к числу «*минус* тысяча»? — спохватилась она. — Может, нам лучше развернуться и пойти влево — ведь аппетит можно нагуливать, гуляя в *любую* сторону!

— Во-первых, торт испекут не так скоро, — сказал Король, —

а, во-вторых, короли просто так не гуляют. Как ты думаешь, зачем размечена дорога для королевских прогулок?

— Действительно, зачем? — удивилась Алиса.

— Во время прогулок я занимаюсь королевскими делами, и у меня бывают важные встречи, — объяснил Король. — А чтобы удобнее было назначать *место* встречи, я и приказал разметить эту дорогу.

— Это вы хорошо придумали, — сказала Алиса. — А где вы назначили встречу? Возле какого числа?

— Вот ты уже и привыкла, что число может отвечать на вопрос «где?», — заметил Король. — Меня должны ждать возле числа «триста», и, кажется, уже ждут!

И действительно, Алиса увидела впереди фигуры двух всадников. Скоро она различила, что это тоже шахматные фигуры — Белый Рыцарь и Чёрный Рыцарь*. Каждый Рыцарь держал большую булаву с шипами.

Когда Алиса и Король подошли поближе, Рыцари почтительно поклонились.

— Что просил передать мне Чёрный Король? — спросил Белый Король.

Рыцари посмотрели друг на друга, и после некоторого молчания Белый Рыцарь торжественно произнёс:

— Я уступаю сэру Чёрному Рыцарю честь ответить на вопрос Вашего Величества.

Король вопросительно посмотрел на Чёрного Рыцаря, но тот произнёс не менее торжественно:

— А я уступаю эту честь сэру Белому Рыцарю. И снова воцарилось молчание.

— Они что — так и будут молчать всё время? — тихо спросила Алиса, и Король так же тихо ответил:

— Наверное, им придётся сразиться за право *уступить другому*: оба они очень благородны, потому что происходят из самых древних родов!

После молчания, которое затянулось минут на пять, Чёрный Рыцарь предложил:

— Решим наш спор в честном поединке.

Рыцари размахнулись своими страшными дубинами и первым же ударом свалили друг друга на землю — при этом раздался такой грохот, будто с третьего этажа бросили дюжину каминных щипцов.

Встревоженная Алиса подбежала к Рыцарям и увидела, что они, к счастью, живы: оба моргали глазами, пытаясь понять, что произошло. Разобрать, какой Рыцарь Белый, а какой Чёрный, стало невозможно: от пыли они стали серыми.

— Мы победили *оба*? — подняв голову, спросил один из Рыцарей.

— Вы оба *побеждены*! — заявил Белый Король. — И поэтому *оба* должны отвечать на мой вопрос *первыми*!

Гремя доспехами, Рыцари поднялись и сказали хором:

— Их Чёрное Величество передаёт привет Вашему Белому Величеству.

— Спасибо, — отозвался Король. — Может быть, Белый Король просил передать мне что-нибудь ещё, кроме привета?

— Кажется, просил, — так же хором сказали Рыцари и, наморщив лбы, уставились друг на друга.

— Наверное, у них при падении всё остальное вылетело из голов, — шепнула Алиса Королю.

— Уж лучше бы вылетел привет, — тихо отозвался Король.

— Их Чёрное Величество приглашает Ваше Белое Величество совершить прогулку по Китайскому Саду! — вспомнили одновременно оба Рыцаря.

— А *где* мы должны встретиться с Чёрным Королём? — спросил Белый Король.

— На перекрёстке двух аллей! — дружно ответили Рыцари.

— До этого я бы и сам догадался, — сказал Белый Король. — Но *на каком* перекрёстке? Ведь в Китайском Саду много аллей — и продольных и поперечных!

Рыцари снова наморщили лбы и посмотрели друг на друга.

— Придётся мне, видно, искать Чёрного Короля по всему саду... — огорчился Белый Король, но тут один из Рыцарей хлопнул по своему шлему железной перчаткой.

— Вспомнил! — воскликнул он, пошатнувшись от удара. — Этот перекрёсток находится *на третьей продольной аллее*!

— И *на седьмой поперечной*! — добавил второй Рыцарь, ударив по своему шлему.

— Хорошо, что вас *двое*! — обрадовался Белый Король. — Китайский Сад недалеко отсюда, — обратился он к Алисе. — Хочешь, я познакомлю тебя с Чёрным Королём?

— Мне бы очень хотелось, — сказала Алиса, предвкушая ещё одну королевскую прогулку, на этот раз с *двумя* королями!

Попрощавшись с Рыцарями, Король и Алиса свернули на боковую улочку и через несколько минут вышли к Китайскому Саду — он раскинулся внизу и был похож на шахматную доску с большими белыми и фиолетовыми клетками. Между клетками шли продольные и поперечные аллеи золотистого цвета.

— Как красиво! — воскликнула Алиса. — Но, по-моему, этот сад больше похож на шахматный, чем на китайский.

— Он и есть шахматный, — отозвался Король. — Только

китайский шахматный.

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— В китайских шахматах фигуры ходят не по клеткам, а по линиям, которые разделяют клетки, — объяснил Король. — И мы в нашем саду тоже гуляем по аллеям, а встречи назначаем на перекрёстках аллей.

— Странные деревья в этом саду, — заметила Алиса, когда они с Королём спускались в сад по красивой лестнице (лестница тоже была выложена в шахматную клетку). — Они похожи на огромные колокольчики — белые и фиолетовые...

— Это и есть колокольчики, — сказал Король. — Но почему ты говоришь, что они огромные? Они, правда, выше меня, но ведь колокольчики и должны быть выше шахматного короля!

— Значит, это *я* стала такой маленькой, — догадалась Алиса и вспомнила свой спор с Чеширским Котом, когда они встретились в межзвёздном пространстве.

— Получается, что прав был всё-таки Чеширский Кот, — подумала Алиса, — и это я тогда уменьшилась, а не он увеличился! Ну конечно, ведь я стала одного роста и с Шалтаем-Болтаем, и с шахматными фигурами... — Алисе вспомнились ещё огромные листья плюща на стене вдоль дороги для королевских прогулок, и она окончательно уверилась в том, что стала очень маленькой.

В другое время это, может быть, и огорчило бы Алису, но сейчас ей очень нравилось идти рядом с Белым Королём по аллеям, посыпанным золотым песком, под сенью белых и фиолетовых колокольчиков, которые тихо позванивали, наполняя воздух прозрачной музыкой.

Алиса заметила, что на каждом перекрёстке двух аллей стоит шахматная ладья, похожая на башню крошечного замка, и на каждой ладье написаны два числа.

— Это номера двух пересекающихся аллей — продольной и поперечной, — объяснил Король. — Как видишь, чтобы договориться о встрече на перекрёстке Китайского Сада, надо указывать не одно число, а *два*!

— А если бы на перекрёстках стояли многоэтажные башни, и встречи назначались в этих башнях, то понадобились бы *три* числа, — заметила Алиса. — Ведь надо было бы указывать ещё, *на каком этаже* башни назначена встреча!

— Это хорошая идея, — подумав, отозвался Белый Король. — Пожалуй, мы так и сделаем: построим на перекрёстках многоэтажные башни!

— Только вот может ли этаж быть *отрицательным*? — усомнилась Алиса.

— Конечно, может, — ответил Король. — У каждой уважающей себя башни должно быть по крайней мере несколько этажей внизу, под землёй!

— Но чтобы запомнить *три* числа, понадобятся, наверное, *три* рыцаря, — улыбнувшись, сказала Алиса.

— Они устроят настоящий турнир! — воскликнул Король. — Однако мы подходим к перекрёстку третьей продольной и седьмой поперечной аллеи — где же Чёрный Король?

Первой Чёрного Короля увидела Алиса — он сидел под одним из фиолетовых колокольчиков и безмятежно спал.

— Придётся отложить твоё знакомство с Чёрным Королём, — огорчённо сказал Белый Король. — Теперь вы увидитесь только на балу...

— *На балу*? — воскликнула Алиса. — А я попаду на этот бал?

— Я приглашаю тебя, — торжественно произнёс Белый Король. — И разрешаю тебе пригласить всех, кого ты захочешь.

— Спасибо! — поблагодарила Алиса. — А где и когда будет этот бал?

— Вот об этом нам с Чёрным Королём и надо договориться... — озабоченно сказал Белый Король и снова посмотрел на спящего Чёрного Короля.

— Может, всё-таки разбудить его? — предложила Алиса.

— Я вижу, он очень устал, — возразил Белый Король. — Ведь у королей так много дел!

— Да ещё и прогулки, — со знанием дела добавила Алиса.

— Придётся мне подождать, пока он проснётся, — вздохнул Белый Король. — Ты сможешь *сама* найти дорогу к числу «минус тысяча»?

— Дорогу до нуля я помню, — сказала Алиса, — а потом надо всё время идти *влево от нуля*?

— Правильно, — подтвердил Король. — Ну, тогда иди: торт тебя уже, наверное, ждёт. До встречи на балу!

Обратно Алиса не шла, а бежала: ей придавала силы мысль о шоколадном торте с орехами. Когда Алиса пробегала мимо нуля, ей показалось, что он подмигнул ей, причём в точности так, как это сделал бы Шалтай-Болтай!

Возле числа «−1000» Алису действительно ожидали восемь поварят — они держали на серебряном блюде торт невиданной величины. Торт был такой большой, что Алиса даже огорчилась.

— Как же можно съесть такой торт? — спросила Алиса.

— С чаем, — дружно ответили поварята. — Мы проводим тебя к Мартовскому Зайцу — там сейчас как раз пьют чай!

— А на меня не рассердятся, если я приду без приглашения? — поинтересовалась Алиса.

— С таким тортом можно приходить и без приглашения, — уверенно сказали поварята и двинулись в путь, торжественно неся торт.

Алисе ничего не оставалось, как пойти следом за ними.

Скоро они вышли из города и зашагали по лесной дороге. Присмотревшись, Алиса заметила, что лес кругом довольно странный: длинные-длинные листья росли прямо из земли. Иногда встречались диковинные деревья с высоким стволом; кроны этих деревьев были похожи на огромные цветы одуванчиков и ромашек.

— Это и есть одуванчики и ромашки! — догадалась Алиса, вспомнив о своём теперешнем росте. — А длинные листья — это трава!

Алиса посмотрела на поварят и вдруг поняла, что это просто белые пешки!

— Так вот почему их *восемь*, — подумала Алиса. — У каждого шахматного короля как раз по восемь пешек! Правда, только в начале игры...

Скоро впереди показался большой дом; трубы дома имели форму заячьих ушей, а крыша была покрыта мехом, и Алиса догадалась, что это дом Мартовского Зайца.

— Как же я приду к чаю такая маленькая? — оробела Алиса. — Я и за стол-то сесть не смогу! Хорошо бы мне подрасти...

И тут же всё кругом начало уменьшаться: растения с длинными листьями превратились в обычную траву, деревья с необычными кронами стали одуванчиками и ромашками, а лесная дорога оказалась тропинкой, идущей через поле!

Впереди Алисы семенили, неся торт, восемь маленьких пешек. Торт, конечно, остался шоколадным, но, увы — он перестал быть огромным! Подходя к дому, Алиса даже засомневалась: прилично ли с таким тортом приходить к чаю без приглашения? И тут она услышала грохот бьющейся посуды.

— *Стоит ли вообще туда идти?* — подумала Алиса, но было уже поздно: пешки-поварята входили в ворота, и Алиса поняла, что её ждут новые приключения.

ОБ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ И ВСЕОБЩЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Каких только обидных названий не давали отрицательным числам — их называли и нелепыми, и ложными, и придуманными... Просто удивительно, что после всего этого отрицательные числа продолжают верно служить людям!

Впервые отрицательные числа появились в Китае около двух тысяч лет назад — тогда ими пользовались для обозначения долгов (помните «минус один торт»?). Ту же роль отрицательные числа играли в Индии начиная с V —VI веков, а позднее — в средневековой Европе. Но учёные таких чисел не признавали: они считали, что *«меньше чем ничто»* ничего быть не может!

Однако отрицательные числа «перехитрили» математиков: они выросли *внутри* самой математики! Вот как это произошло.

С давних пор математики решали уравнения. Уравнение — это равенство, в которое входит неизвестная величина (такой величиной может быть, например, площадь поля, возраст человека или число рабов). Решить уравнение — значит узнать, какому числу равна эта неизвестная величина. И вот, когда это число находили, оказывалось иногда, что оно должно быть меньше нуля! Такие решения уравнений считали «ложными», «нелепыми» и отбрасывали их — действительно, разве может, например, площадь поля быть меньше нуля?

$$x - 12 = 8$$
$$5 - x = 10$$

Это два уравнения, в которых неизвестное обозначено буквой *x*. У одного из этих уравнений решение положительное, а у другого — отрицательное

Однако скоро обнаружилось, что даже для того, чтобы получать положительные, вполне «законные» решения, приходится порой пользоваться отрицательными числами в *промежуточных* вычислениях, как бы на черновике. И эти «нелепые» числа надёжно приводили к правильным результатам, но... при одном удивительном условии: произведение двух *отрицательных* чисел надо было считать числом *положительным*! Это казалось настолько странным, что один учёный назвал отрицательные числа «порождением дьявола», а другой заявил, что понять правило умножения отрицательных чисел выше человеческого разумения! В течение нескольких веков математики, скрепя сердце, пользовались отрицательными

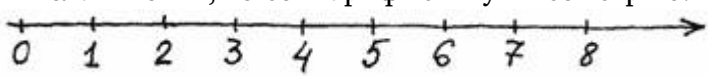
числами, но признавать их настоящими числами отказывались наотрез.

Признание отрицательных чисел пришло с неожиданной стороны.

В XVII веке жил французский учёный Декарт (во Франции ему, к сожалению, довелось жить очень мало, а книги его во Франции были запрещены). В те времена математика состояла как бы из нескольких отдельных наук: *арифметики*, которая изучала свойства чисел, *алгебры* — науки о решении уравнений, и *геометрии*, где изучались свойства фигур. Кроме того, следуя древним, к математике относили ещё астрономию и музыку!

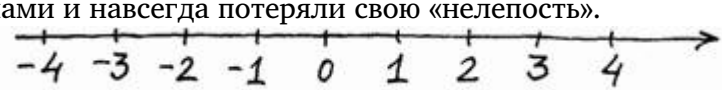
И вот Декарт задался дерзкой целью: создать науку, которая объединит всю математику. «К области математики, — писал Декарт, — относятся те науки, в которых рассматриваются либо порядок, либо мера, и не имеет значения — будут ли это числа, фигуры, звёзды, звуки или что-нибудь другое... Должна существовать общая наука, объясняющая всё, что относится к порядку и мере... и эта наука должна называться всеобщей математикой».

Основная идея Декарта была гениально проста. Он взял прямую, обозначил на ней точку и написал рядом с ней число «нуль». Затем он взял отрезок определенной длины и стал откладывать этот отрезок, как «единичную меру», вдоль прямой вправо от точки, обозначенной нулём. При этом на прямой появлялись точки, соответствующие числам 1, 2, 3... — эти числа показывали, *сколько раз* отложен «единичный отрезок» (помните число королевских шагов?). Теперь каждому натуральному *числу* соответствовала *точка* на прямой; это был решающий шаг — он связал числа и точки, то есть арифметику и геометрию!



Если на прямой отметить на равных расстояниях друг от друга точки 0, 1, 2, 3 и так далее, то эта прямая превратится в *числовую ось*

Сделав этот шаг, Декарт догадался, что *любую* точку на прямой можно сопоставить с числом, и при этом точкам, расположенным на прямой *левее нуля*, соответствуют как раз *отрицательные* числа (помните числа левее нуля вдоль дороги для королевских прогулок?). Так, благодаря Декарту, отрицательные числа обрели равноправие с положительными числами и навсегда потеряли свою «нелепость».

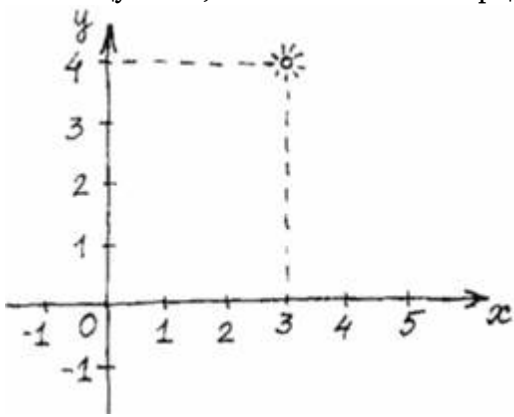


Числовая ось неограниченно продолжается в *обе* стороны:

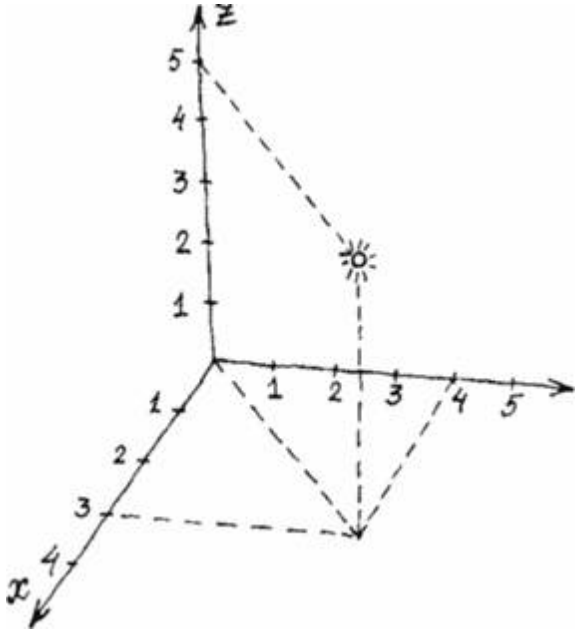
слева на ней расположены *отрицательные* числа, а *справа* — *положительные*

Точку *на прямой* можно задать *одним* числом, а для точки *на плоскости* нужно *два* числа (помните башенки с двумя числами на перекрёстках двух аллей в Китайском Саду?). Благодаря этому *линии* на плоскости оказалось возможным связать с *уравнениями* — так появились *графики*. О более тесной связи между алгеброй и геометрией нельзя было и мечтать: решение любой геометрической задачи можно было свести теперь к решению уравнений!

Числа, которыми обозначают точки, называют сегодня во всем мире *«декартовы координаты»*, хотя у Декарта были предшественники: греческий учёный Птолемей, составляя во II веке географические карты, пользовался долготой и широтой в качестве географических координат, а арабский поэт-математик Омар Хайям (о нём мы уже писали) пользовался координатами больше чем за пятьсот лет до Декарта! Одновременно с Декартом связь между алгеброй и геометрией открыл и его соотечественник Ферма. Но всё-таки название «декартовы координаты» вполне справедливо: именно Декарт развил идею о взаимосвязи разных областей математики и представил математику как *единую* науку, «объясняющую всё, что относится к порядку и мере».



Положение любой точки на плоскости можно задать с помощью двух чисел, которые называются *координатами* этой точки и обозначаются обычно буквами x и y. На рисунке отмечена точка с координатами $x = 3$ и $y = 4$



Положение любой точки в пространстве можно задать с помощью трех чисел — координат этой точки (они обозначаются обычно буквами *x, y, z*). Какие координаты имеет точка, отмеченная на этом рисунке?

НЕБЫЛИЦА О СЛУЧАЕ, КОТОРЫЙ ПОДСКАЗАЛ ДЕКАРТУ ИДЕЮ КООРДИНАТ

Однажды в незнакомый город
Приехал молодой Декарт.
Его ужасно мучил голод.
Стоял промозглый месяц март.

Решил к прохожей обратиться
Декарт, пытаясь дрожь унять:
— Где тут гостиница, скажите?
И дама стала объяснять:

— Идите до молочной лавки,
Потом до булочной, за ней
Цыганка продаёт булавки
И яд для крыс и для мышей,

А дальше будут магазины,
Найдёте в них наверняка
Сыры, бисквиты, фрукты, вина
И разноцветные шелка...

Все объясненья эти слушал
Декарт, от холода дрожа.
Ему хотелось очень кушать,
Но звонкий голос продолжал:

— За магазинами — аптека
(аптекарь там — усатый швед),
И церковь, где в начале века
Венчался, кажется, мой дед...

Когда на миг умолкла дама,
Вдруг произнёс ее слуга:
— Идите три квартала прямо
И два направо. Вход с угла.

КАКОЙ МОМЕНТ БЫЛ ПОСЛЕДНИМ?

Перед домом стоял длинный стол. Над столом на ветке дерева висели большие часы, а за столом, сгрудившись у одного конца, сидели трое: Шляпник, Мартовский Заяц и зверёк Соня.

Шляпник что-то горячо доказывал, размахивая чашкой с чаем и проливая чай на Соню; Заяц, пригнув уши к затылку, слушал Шляпника, а Соня спал, не обращая внимания ни на спор, ни на чай.

Вдруг Алиса услышала у себя под ногами чей-то писк.

— Мыши! — промелькнуло у неё в голове, и в следующий момент она уже стояла на столе среди чашек.

Шляпник замолчал и уставился на Алису, держа чашку в руке. Заяц, подняв уши, тоже смотрел на Алису. Она не знала, как надо начинать разговор, приходя в гости таким необычным образом, осмотрелась и увидела, что возле стола стоят пешки-поварята — они протягивали торт и тоненькими голосками просили Алису:

— Возьми же!

— Так вот кто пищал! — поняла Алиса, спрыгнула со стола и взяла торт.

Поварята тут же развернулись и гуськом выскользнули за ворота.

Алиса стояла с тортом в руках и думала, с чего начать разговор. (При этом она заметила, что трава вокруг стола усыпана битой посудой).

Молчание прервал Шляпник.

— Ты отгадала загадку? — спросил он. — Что общего у ворона и конторки?

— *Число*! — тут же выпалила Алиса, вспомнив почему-то беседу с Чеширским Котом. — Ворон *один*, и конторка *одна*!

— Хм, — озадаченно произнёс Шляпник и перевёл взгляд на Зайца. — Это действительно отгадка?

— Сейчас проверим, — отозвался Заяц и, подняв глаза вверх, глубоко задумался. При этом он начал так смешно шевелить раздвоенной губой, что Алиса с трудом сдержала улыбку. Наконец, Заяц заговорил:

— Если один ворон сядет на одну конторку, то каждому ворону достанется по конторке, а на каждой конторке будет сидеть по ворону... Значит, воронов и конторок одинаковое число... Она права! — заключил он.

— Каждому ворону, говоришь, достанется по конторке? — задумчиво переспросил Шляпник. — Но зачем ворону конторка?

Тем более *каждому*?

— *Это уже другие* загадки, — сказала Алиса, поставила торт на стол и села в кресло: она поняла, что ждать приглашения бесполезно.

Шляпник и Заяц молча следили за ней.

— *Каждому из нас* по торту не достанется, — заметил Заяц.

— Каждому по торту и не надо, — сказала Алиса. — Съесть целый торт одному — это не удовольствие, а наказание!

— Смотря для кого, — сквозь сон проговорил Соня.

— Уж *тебе-то* целый торт наверняка не достанется, — заверил его Шляпник.

— Давайте разделим торт на всех, — предложила Алиса.

— А ты сможешь разделить *один* торт? — недоверчиво спросил Шляпник.

— Смогу, — с достоинством ответила Алиса. — Каждому из нас достанется по одной четверти.

— Делить она умеет, — важно подтвердил Заяц. Алиса взяла со стола нож, но Шляпник остановил её.

— А ты заслужила одну четверть? — спросил он.

Алиса чуть не задохнулась от возмущения: она принесла торт, и ей, оказывается, надо еще заслужить свою часть!

— Я имею в виду: заслужила ли ты только *одну* четверть? — пояснил Шляпник. — Может, тебе придётся съесть *две* четверти? Или *три*? Или даже все *четыре*?

— Но я не хочу больше *одной* четверти! — сказала Алиса.

— Мало ли, что ты не хочешь! — отозвался Шляпник. — Надо ещё, чтобы каждый из нас троих тоже захотел съесть четверть!

— Но разве вы этого не хотите? — удивилась Алиса. — Торт, кажется, очень вкусный!

— Мне тоже так ка... — начал было Заяц, но Шляпник посмотрел на него, и он осёкся.

— Ты назвала только *одну* отгадку на мою загадку, — сказал Шляпник, обращаясь к Алисе.

— Но разве одной отгадки на загадку мало? — снова удивилась Алиса. — По-моему, у каждой загадки должна быть одна отгадка.

— Что это такое: *не слон, а с хоботом*? — неожиданно спросил Соня, приоткрыв один глаз (Алиса заметила, что глаз у Сони очень красивый).

— *Муха*, — ответила Алиса: ей понадобилось всего пять секунд, чтобы найти отгадку!

— *И мамонт тоже*, — медленно произнёс Соня и закрыл свой красивый глаз.

— Разве муха и мамонт — это одно и то же? — спросил

Шляпник.

— Нет, конечно, — ответила Алиса. — Но ведь *одну* отгадку я всё-таки нашла!

— Этого недостаточно! — воскликнул Шляпник. — Отгадать загадку — значит, найти *все* отгадки!

— И доказать, что *других* отгадок *нет*! — добавил Заяц.

— Я никогда не думала, что отгадывать загадки так трудно, — призналась Алиса.

— Ещё бы! — подтвердил Шляпник. — Но ещё труднее находить *все загадки на одну отгадку*!

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— На одну отгадку может быть *несколько* загадок, — объяснил Шляпник. — Разве, например, ты знаешь только *одну* загадку про зайца?

— Конечно, не одну, — ответила Алиса.

— Значит, «заяц» — *одна* отгадка на *несколько* загадок, — заключил Шляпник.

— Загадай какую-нибудь загадку про зайца, — попросил Алису Мартовский Заяц.

— *«По лесу жаркое в шубе бежит»*, — сказала Алиса первое, что ей пришло в голову, и тут же закрыла рот рукой. Но было уже поздно: Заяц наполовину залез под стол.

— А какие ты знаешь загадки *про шляпника*? — поинтересовался Шляпник после затянувшегося молчания.

Алиса бросила взгляд на битую посуду вокруг стола и нерешительно произнесла:

— По-моему, про шляпника загадок нет...

— Значит, по-твоему, шляпник — это *отгадка без загадок*? — спросил Шляпник.

Тут у бедной Алисы всё окончательно перемешалось в голове!

— Об отгадках без загадок я слышу впервые, — призналась она.

— Это то же самое, что *ответы без вопросов*, — объяснил Шляпник.

— Кажется, я о таких тоже не слышала, — сказала Алиса.

— Ты, наверное, никогда не училась в школе? — предположил Шляпник.

— Я и сейчас учусь в школе! — ответила Алиса.

— Так неужели у вас не бывает такого: учитель что-то рассказывает и рассказывает, а вопросов ему никто не задаёт? — удивился Шляпник.

— Бывает, — вспомнила Алиса. — Наш учитель по истории терпеть не может, когда ему задают вопросы!

— Значит, всё, что он говорит — это и есть ответы без

вопросов! — объяснил Шляпник.

— Наверное, — согласилась Алиса. — Но это совсем неинтересно — ещё хуже, чем вопросы без ответов...

— *Смотря какие вопросы*, — возразил Шляпник, и лицо его помрачнело. — *Один* вопрос мучает нас уже давно...

— Какой? — заинтересовалась Алиса.

— Видишь, — показал Шляпник на часы, — тут всегда почти шесть часов...

Алиса посмотрела на часы: они показывали ровно шесть.

— Почему «почти»? —спросила она. — По-моему, как раз *точно* шесть!

— В том-то и дело, что шести ещё *нет*! — воскликнул Шляпник. — Часы собрались бить, но до сих пор так и не пробили...

— Они всегда *хрипят*, прежде чем начинать бить, — сказал Заяц.

Все замолчали, и стал явственно слышен хрип больших часов, висящих над столом. Алисе стало как-то не по себе.

— И давно у вас *так*? — тихо спросила она.

— Давно, — ответил Шляпник и замолчал.

— Так какой же вопрос вас мучает? — решилась нарушить молчание Алиса.

— Какой момент *последний* перед шестью часами? — спросил Шляпник и посмотрел Алисе прямо в глаза.

— Этого я не знаю, — подумав, сказала Алиса. — По-моему, это неплохая *загадка*!

— Ты должна её разгадать, — серьёзно сказал Шляпник. — Поверь, это очень важно!

— Я попробую, — сказала Алиса. — А вы помните, что было *перед* шестью часами?

— Вспоминай! — приказал Шляпник Зайцу. — Ты моложе, и у тебя память лучше.

— Ты пришёл сюда ровно в пять часов, а Соню мы ждали до половины шестого... — начал Заяц.

— Это были очень длинные полчаса, — перебил его Шляпник. — Чайник уже стоял на столе, но без Сони мы не начинали пить чай!

— Зато как только Соня пришёл, я сразу же налил тебе первую чашку чая, — продолжал Заяц. — Ты выпил её так быстро, что я себе и налить не успел...

— А *потом, потом*? — торопил Шляпник.

— Без двадцати шесть я налил тебе вторую чашку чая, — напомнил Заяц. — Её ты тоже выпил сразу...

— Значит, чай был не очень горячий, — заметил Шляпник.

— Это из-за Сони! — стал оправдываться Заяц. — Пока мы его ждали, чай остыл...

— Вспоминай *дальше*! — нетерпеливо перебил Шляпник.

— Третью чашку я налил тебе без десяти шесть, — продолжил воспоминания Заяц.

— Тебе что, чаю жалко? — с подозрением спросил Шляпник.

— Я просто вспоминаю... — робко сказал Заяц.

— Вспоминай о чём-нибудь другом! — предложил Шляпник.

— Но другого ничего не было, — пролепетал Заяц. — Ты только пил чашку за чашкой...

— Хватит! — крикнул Шляпник и ударил по столу. Несколько чашек упали и разбились.

Алиса посмотрела на черепки вокруг стола и спросила у Зайца:

— А где вы берёте *новые* чашки?

— Не отвлекайся на ерунду! — раздражённо заметил Шляпник. — Что было *дальше*? — обратился он к Зайцу.

— Без одной минуты шесть я налил тебе четвёртую чашку... — с опаской произнёс Заяц.

— Четвёртую чашку я выпил залпом! — неожиданно просиял Шляпник. — Это я хорошо помню: чай стал совсем холодным! Но когда я поставил чашку на стол, шести часов ещё не было — часы ещё не били!

— *Не было, не били*, — сразу согласился Заяц. — Но до шести часов оставалась всего одна секунда: часы как раз начали хрипеть...

Все невольно снова прислушались: часы по-прежнему хрипели.

— А что было *после* того, как я поставил чашку на стол? — после некоторого молчания спросил Шляпник. — Ведь до шести часов оставалась ещё *целая секунда*!

— По-моему, ничего больше уже не было, — тихо сказал Заяц и начал снова залезать под стол.

— Значит, по-твоему, — так же тихо спросил Шляпник, в упор глядя на Зайца, — без одной секунды шесть — это *последний момент перед шестью часами*?

Заяц задрожал так сильно, что чашки на столе задребезжали.

— Перестань дрожать! — заорал Шляпник, отчего чашки задребезжали ещё сильнее, а несколько чашек снова скатились со стола. — Ведь был ещё момент, когда до шести часов оставалось *полсекунды* — разве ты этого не помнишь?

— П-п-помню, — раздался уже из-под стола голос Зайца, — я помню, что этого я уже не помню...

— Даже если ты этого не помнишь, такой момент всё равно

был! — продолжал бушевать Шляпник.

— Если уж на то пошло, — сказал Заяц, высунув уши из-под стола, — так и этот момент не был последним перед шестью часами! Полсекунды можно *ещё раз* разделить пополам — значит, был и такой момент, когда до шести часов оставалась только *четверть секунды*...

— Последним был тот момент, когда я заснул! — объявил вдруг Соня.

— *Твой* последний момент наступит *сейчас*! — снова рассвирепел Шляпник, схватил Соню и так широко размахнулся, будто собрался забросить его на Луну.

— Что вы делаете? — не выдержала Алиса.

— Не отвлекайся, — строго сказал ей Шляпник и посадил Соню на чайник. — Думай о последнем моменте и ни о чём больше!

— Я буду думать о том, о чём *я* захочу! — заявила Алиса.

— А о чём ты хочешь думать? — поинтересовался Шляпник.

— Я... я ещё не решила, — растерялась Алиса.

— Тогда почему бы тебе не думать о последнем моменте? — спросил Заяц, вылезая из-под стола.

— Не буду! — упрямо сказала Алиса.

— Не будешь? — нахмурившись, переспросил Шляпник.

— Не буду, — повторила Алиса. — Пусть он хоть всю посуду перебьёт! — подумала она про себя.

— Ладно, — неожиданно согласился Шляпник. — Но только давай честно: раз ты сказала, что не будешь думать о последнем моменте, так *не думай*! Обещаешь?

— Обещаю, — сердито буркнула Алиса. Наступило молчание. Шляпник тихонько барабанил пальцами по столу, Заяц медленно мешал ложечкой чай, а Соня, сидя на чайнике, клевал носом.

Алиса честно пыталась выполнить своё обещание — не думать о последнем моменте перед шестью часами. Но удивительное дело — чем больше она старалась об этом не думать, тем настойчивее это лезло ей в голову!

— Какой же момент, действительно, *последний*? — крутилось у Алисы в голове помимо её воли. — Ведь даже когда до шести часов остаётся всего одна миллионная доля секунды, её снова можно разделить пополам — значит, есть и такой момент, когда до шести часов остаётся одна двухмиллионная доля секунды... но и этот момент не последний: делить пополам можно без конца... *Делить без конца*! — воскликнула она про себя, и у неё вырвалось:

— Последнего момента *нет вообще*, потому что делить пополам можно без конца! Получается, что у этой загадки просто

нет отгадки!

И тут Алиса увидела, что Заяц и Шляпник ужасно расстроились: Заяц готов был заплакать, а Шляпник утратил весь свой пыл и смотрел перед собой пустыми глазами.

— Но почему вас так огорчает, что последнего момента перед шестью часами нет? — удивилась Алиса.

— Неужели ты не понимаешь? — грустно сказал Шляпник. — Ведь если последнего момента нет, значит, шесть часов не наступят *никогда*...

— Почему? — спросила Алиса.

— Потому что они могут наступить только *после* этого момента, а его-то как раз и *нет*! — ответил Шляпник.

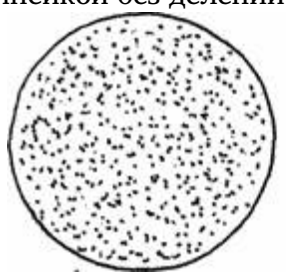
Тут Соня качнулся чуть сильнее и... свалился с чайника головой в торт!

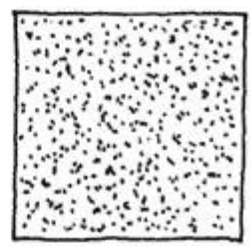
КАК РЕШАЮТСЯ ЗАДАЧИ БЕЗ РЕШЕНИЙ

Казалось бы, кому могут быть интересны загадки без отгадок, или, говоря языком математиков, *задачи, у которых нет решений*? Однако именно такие задачи приковывали внимание математиков в течение тысячелетий: эти непокорные задачи были вызовом человеческому уму, и поэтому они интриговали математиков так же сильно, как сыщиков — тайны загадочных преступлений.

Вот история трёх знаменитых задач, пришедших из глубокой древности.

Первая задача называется *«квадратура круга»*: как построить круг и квадрат одинаковой площади, пользуясь только циркулем и линейкой без делений?





Примерно так выглядят круг и квадрат одинаковой *площади* — чтобы закрасить их одним и тем же слоем краски, понадобится одинаковое количество краски

Условие задачи кажется настолько простым, что за неё берётся даже тот, кто только начал знакомиться с геометрией, однако решить её не удалось даже величайшим математикам! Правда, Архимед придумал способ, как можно подойти к точному решению *сколь угодно близко*.

Шли века и тысячелетия, но задача о квадратуре круга оставалась непобедимой. И только в конце XIX века немецкий математик Линдеман нашёл неожиданное решение этой задачи: он строго доказал, что с помощью *только* циркуля и линейки построить круг и квадрат одинаковой площади *невозможно*! Это доказательство произвело на математиков такое сильное впечатление, что Линдемана нарекли «победителем задачи о квадратуре круга». Такой титул говорит, что строгое доказательство *отсутствия решения* математики считают тоже *решением*: ведь решить задачу — это найти *все* решения или доказать, что решений *нет*!

Вторая знаменитая задача называется *«удвоение куба»*. О

происхождении этой задачи существует даже легенда.

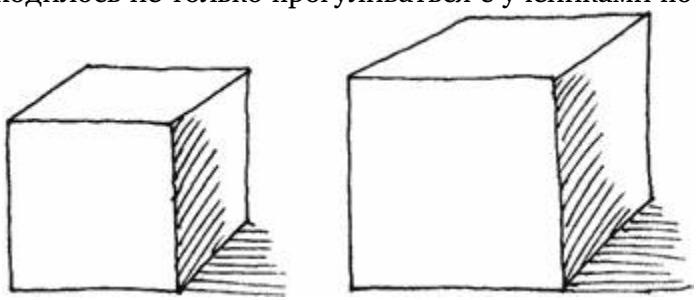
Однажды на острове Делос в Эгейском море вспыхнула эпидемия чумы. В те времена перед чумой были бессильны даже мудрые греки. Единственное, что они могли сделать — обратиться за помощью к богам. Однако беседовать с богами напрямую мог не каждый древний грек — этим занимались только «оракулы», то есть «предсказатели судеб». И вот оракул, посоветовавшись с богом искусств Аполлоном, объявил, что для спасения от чумы надо *удвоить* золотой жертвенник Аполлону. Этот жертвенник имел форму куба, и жители Делоса поспешили как можно скорей отлить из золота ещё один такой же куб и поставили его поверх первого.

Однако чума не прекратилась.

— Надо удвоить жертвенник, *сохранив его форму*, — объяснил оракул. — Новый жертвенник должен быть тоже *кубом*, но чтобы найти размеры нового куба, Аполлон разрешает вам пользоваться только циркулем и линейкой!

Бедные делосцы, не сумев сами решить эту задачу, обратились к знаменитому философу Платону (он так уважал математику, что над входом в сад, где он, прогуливаясь, занимался со своими учениками, велел начертать: «Пусть не входит сюда не знающий геометрии»). Однако и Платон не смог решить задачу об удвоении куба.

Взялся за эту задачу и другой греческий математик — Архит. Он был не только выдающимся математиком, но и хорошим полководцем, однако даже математик-полководец не смог победить задачу об удвоении куба: хотя он и нашёл очень красивое решение, но оно требовало не только циркуля и линейки. К многочисленным заслугам Архита принадлежит, между прочим, и спасение Платона от рабства — как видите, жизнь древнегреческих учёных была не такой уж безмятежной: им приходилось не только прогуливаться с учениками по садам!



Второй из этих кубов имеет примерно вдвое больший *объем*, чем первый: если бы это были сосуды для воды, то во второй из них поместилось бы воды вдвое больше, чем в первый

Примерно в то же время (в IV веке до нашей эры) «удвоением

куба» занимался ещё один древнегреческий математик — Менехм. О нём существует красивая легенда. Однажды Александр Македонский обратился к Менехму:

— Я хочу изучить всю премудрость греческой науки. Но скажи: нет ли для царей более короткого пути к геометрии?

— К геометрии нет царских путей, — ответил царю учёный. — Для всех — одна дорога!

Эта беседа настолько замечательна, что её приписывают ещё одному царю и ещё одному учёному: царю Птолемею и математику Евклиду, который действительно собрал «всю премудрость греческой науки» в большую книгу, которую он назвал «Начала» (Евклид уже тогда понимал, что это только *начало*, однако до сих пор в школах всего мира геометрию изучают почти по Евклиду!).

Среди греческих учёных, занимавшихся задачей об удвоении куба, был и Эратосфен, который первым придумал, как «отсеивать» простые числа от составных. Этот способ называется «решето Эратосфена» и используется до сих пор, хотя вычисления проводятся сегодня на электронно-вычислительных машинах. Эратосфен, кстати, был не только превосходным математиком, но и неплохим спортсменом — олимпийским чемпионом по пятиборью! Но и олимпийский чемпион не смог решить задачу об удвоении куба.

Эта задача «дразнила» математиков больше двух тысяч лет, и, наконец, Декарт заподозрил неладное: употребив сам немало сил на безуспешные попытки «удвоения куба», он предположил, что эта «простая» задача вообще не имеет решения. Однако только через два века после Декарта другой французский математик, Ванцель, смог строго доказать, что задача об удвоении куба действительно неразрешима! Как и в задаче о квадратуре круга, безупречное доказательство *отсутствия* решения и стало настоящим решением задачи.

Третьей знаменитой задачей древности была задача о *«трисекции угла»*: как с помощью циркуля и линейки разделить *любой* угол на три равные части? Эта задача продержалась также больше двух тысячелетий и «победил» её тот же самый Ванцель — доказал, что она неразрешима.

Этот угол разделен примерно на три равные части

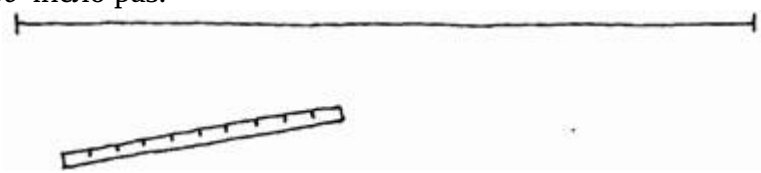
«Три знаменитые задачи древности» стали знаменитыми не только потому, что каждая из них оказалась крепким орешком: они сослужили добрую службу математике, потому что при попытках их решения рождались новые области этой науки.

А сейчас мы расскажем о задаче, отсутствие решения у которой изменило весь ход развития математики.

Вот эта задача: как измерить *точно* длину любого отрезка?

Начать, конечно, надо с выбора «единицы измерения», то есть отрезка, длина которого принята за *единицу*. А потом надо откладывать эту «единицу» вдоль того отрезка, который мы хотим измерить. Если, например, единичный отрезок умещается в нашем отрезке ровно три раза, мы говорим, что длина отрезка равна трём единицам.

А если три «единицы» не умещаются, а двух — мало? Ничего страшного: надо только вспомнить о дробных числах! Разделим нашу «единицу» на равные части и возьмём новую меру — *часть* единицы. А поскольку единичный отрезок можно делить на *любое* число равных частей, то, казалось бы, *всегда* можно найти такую малую долю единицы, которая умещалась бы на нашем отрезке *целое* число раз.



По крайней мере так казалось древним грекам. Более того, они были в этом совершенно уверены! Ведь они считали, что целые числа лежат в основе всего мироздания — помните слова Пифагора: «число есть начало всех вещей»?

И надо же: случилось так, что именно Пифагор открыл, что это *неверно*! Из знаменитой теоремы Пифагора, которую изучают сегодня во всех школах, следовал поразительный вывод: если сторону квадрата принять за единицу, то диагональ *этого же* квадрата измерить точно *невозможно*, потому что не существует таких долей единицы, которые укладываются на диагонали целое число раз, какими бы малыми ни были эти доли!

Открытие Пифагора заставило учёных задуматься: можно ли делить отрезок на всё меньшие и меньшие части *без конца*? Через две тысячи лет эти размышления привели к великим открытиям, о которых мы скоро расскажем.

НЕБЫЛИЦА О ПИФАГОРЕ, КОТОРУЮ ТРУДНО ОТЛИЧИТЬ ОТ БЫЛИ

Говорят, что Аполлона
Он любимым сыном был,
Что всю мудрость Вавилона
Он познал, когда там жил,

Что он слышал, как планеты
Песнь поют в тиши ночей,
Что учил он: числа — это
Есть начало всех вещей,

Что медведицу словами
Мог он перевоспитать,
Мог беседовать с быками,
Сны надёжно толковать,

Что в пещере целый месяц
Он совсем один прожил,
Что любил число он десять,
А семнадцать — не любил,

Что остановить он речью
Мог разбег морских валов,
Что река ему навстречу
Поднялась из берегов...

Где тут быль, где небылица —
Неизвестно до сих пор.
Но в преданьях говорится,
Что таков был Пифагор.

КАК СЪЕСТЬ ЦЕЛЫЙ ТОРТ?

Шляпник сразу же стал вытаскивать блюдо с тортом из-под Сони. Однако Заяц вцепился в блюдо с другой стороны и стал тянуть в противоположную сторону. Блюдо рывками ездило по столу туда-сюда, и всё это время Соня сквозь сон быстро ел торт. Наблюдая эту сцену, Алиса смеялась до слёз.

Когда Шляпнику удалось, наконец, вырвать блюдо, оно было таким чистым, будто на нём никогда и не бывало шоколадного торта! Зато Соня был весь в шоколаде и сладко облизывался, продолжая спать.

Шляпник посмотрел на пустое блюдо и увидел в нём себя — полированное блюдо отражало, как зеркало!

— Привет, дружище! — приподняв цилиндр, обратился Шляпник к своему отражению, и оно ответило ему тем же. — Теперь ты застрял тут надолго — может быть, *навсегда*: похоже, что шесть часов так и не наступят...

— Мне кажется, шесть часов тут ни при чём, — вмешалась Алиса в разговор Шляпника с его отражением. — Ведь для того, чтобы наступил *любой* момент времени, должны пройти *все предыдущие* моменты, а их бесконечно много...

— В том-то и дело! — подхватил Шляпник. — В одной только *секунде* и то бесконечно много моментов! Как же они *все* могут пройти?

— Но время всё-таки идёт... — попыталась возразить Алиса.

— Оно *стоит*! — вскричал Шляпник, показывая на часы. — Разве ты не видишь, что оно стоит?

— А Соне всё-таки достался целый торт одному! — в наступившей тишине заметил Заяц.

— Как ты можешь думать о каком-то торте, когда время остановилось! — упрекнул его Шляпник.

И тут у Алисы родилась удивительная мысль.

— Если бы время остановилось из-за того, что в любом промежутке бесконечно много моментов, Соня не смог бы съесть *весь* торт! — воскликнула она.

— Ты шутишь? — печально спросил Шляпник. — При чём здесь торт?!

— Когда Соня ел торт, — начала объяснять Алиса, — он должен был сначала съесть *половину* торта, потом *половину* оставшейся *половины*, потом — *половину половины половины*... и у него всегда должно было что-то *оставаться* — ведь делить пополам можно *без конца*!

— Это и правда похоже чем-то на последний момент! —

оживился Шляпник.

— Но Соня съел торт *до конца*! — напомнил Заяц, показывая на сверкающее блюдо.

— До конца... — задумчиво подтвердил Шляпник и посмотрел на блюдо с обеих сторон. — Как же у него это получилось? — спросил он у своего отражения, но оно ответило ему *тем же* вопросом. — Послушай! — толкнул он Соню. — Как ты ухитрился съесть *весь* торт?

Соня приоткрыл один глаз, но ничего не ответил.

Тогда Заяц взял чайную ложку, обмакнул её в вазочку с вареньем и начал старательно писать что-то вареньем на скатерти. Он писал в одну строку, и эта строка становилась всё длиннее и длиннее.

Какое-то время Шляпник молча наблюдал за Зайцем, но, наконец, не выдержал:

— Что ты делаешь? — крикнул он. — Это же последнее варенье!

Но Заяц был так увлечён, что ничего не слышал: он встал со своего места, взял вазочку с вареньем и, продолжая писать, пошёл вдоль стола. Время от времени он поднимал голову и, шевеля губами, что-то считал.

Алиса подошла к Зайцу и увидела, что он написал:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+$$

— Что это вы складываете? — спросила Алиса.

— Я хочу узнать, *сколько* Соня съел, — объяснил Заяц, не отрываясь от писания. — Он съел половину торта, потом еще четверть, потом одну восьмую, потом — одну шестнадцатую...

— Так записываются *дробные числа*! — догадалась Алиса. — Но ведь вы же никогда не допишете эту сумму до конца! — воскликнула она. — У этой суммы *нет* конца, потому что делить пополам можно без конца!

— А как же тогда Соня съел торт до конца? — недоверчиво спросил Заяц.

— Соня съедал каждую следующую часть вдвое быстрее, — подумав, сказала Алиса, — потому что каждая следующая часть вдвое меньше, чем предыдущая!

— А я, наоборот, на каждое новое слагаемое трачу всё больше и больше времени, — вздохнул Заяц, утирая лапкой пот со лба. — Ведь в числителе каждой дроби единица, а знаменатели становятся всё больше и больше...

— Поразительно! — воскликнул Шляпник, тоже подойдя к Зайцу. — Чем *меньше* число, тем *дольше* приходится его писать — я бы никогда в это не поверил!

И тут Алису осенило.

— Дальше можно не писать! — воскликнула она. — Я знаю, чему равна *вся* эта сумма!

— Ты хочешь сказать, что сложила в уме бесконечно много слагаемых? — удивился Шляпник. — Выписать их нельзя, а сложить в уме можно?!

— Бесконечно много слагаемых *только в уме* и можно сложить, — ответила Алиса. — Ни на какой бумаге они просто не поместятся. И даже на скатерти, — добавила она, посмотрев на Зайца.

— И чему же, по-твоему, равна эта сумма? — поинтересовался Шляпник.

— *Единице*, — сказала Алиса. — Она равна в точности единице, потому что Соня съел как раз *один* торт!

— Но торт был довольно большой, — заметил Заяц.

— Величина торта не имеет значения, — сказала Алиса.

— *Теперь*, конечно, не имеет, — огорченно вздохнул Заяц. — Ведь торт уже съеден...

— И совсем не поэтому! — начала сердиться Алиса. — Вы же сами приняли *весь* торт за *единицу*, когда выписывали эту сумму! Вот, например, одна восьмая — это же одна восьмая всего торта, правильно?

— Правильно! — подтвердил Заяц. — Я писал правильно, даже не понимая, *что* пишу! — с радостным удивлением повернулся он к Шляпнику.

— Это действительно странно, — отозвался Шляпник. — Ведь обычно ты не понимаешь того, что *говоришь*.

Заяц аккуратно обмакнул ложечку в варенье и стал писать новые слагаемые: он решил продолжать правильное дело, даже если у него нет конца.

— И всё-таки я не понимаю, как сумма *бесконечного числа* слагаемых может быть равна *единице*! — немного помолчав, сказал Шляпник.

— Мне кажется, дело в том, что новые слагаемые становятся *всё меньше и меньше*, и поэтому с каждым новым слагаемым сумма увеличивается всё *медленнее и медленнее*... — начала рассуждать вслух Алиса.

— Но *увеличивается*! — перебил её Шляпник. — С каждым новым слагаемым сумма всё-таки *увеличивается*! Как же она может не перерасти в конце концов какую-то несчастную единицу?

Это действительно казалось странным, и Алиса задумалась. Она вытащила из кармана карандаш — тот самый, который дал ей Чеширский Кот в межзвёздном пространстве, и нарисовала на

скатерти отрезок:

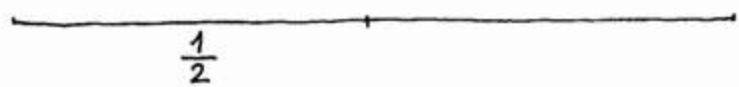
— Представьте себе, что это весь торт, который мы приняли за единицу, — сказала Алиса.

Шляпник нагнулся к столу и внимательно посмотрел на линию, нарисованную на скатерти.

— *Представил*, — сказал он, наконец.

— А теперь разделим отрезок *пополам*, — предложила Алиса и поставила точку посредине отрезка:

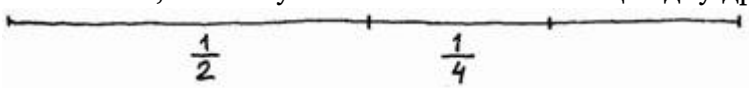
— Если весь отрезок — единица, то его половина — *одна вторая*, — сказала Алиса и написала эту дробь под левой половиной отрезка:



— Теперь правую половину снова разделим пополам, — продолжила Алиса и поставила ещё одну точку:

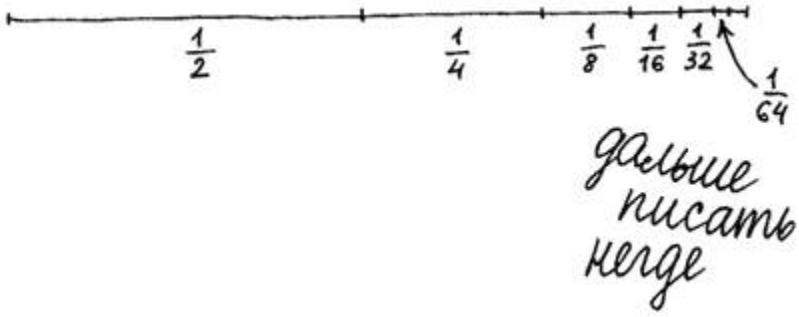
— Каждая из новых частей будет равна *одной четвертой*, — заметил Шляпник.

— Конечно, — кивнула Алиса и написала ещё одну дробь:



— Самую правую четверть можно опять разделить пополам! — воскликнул Шляпник. — Кажется, я начинаю понимать, к чему ты ведешь... — Он взял у Алисы карандаш, отметил на отрезке ещё одну точку и написал ещё одну дробь:

— Самый правый кусок можно делить пополам снова и снова! — возбужденно продолжал Шляпник, ставя все новые и новые точки и подписывая под ними дроби — каждую новую дробь в два раза меньше предыдущей. — Получаются одна шестнадцатая, одна тридцать вторая, одна шестьдесят четвёртая... как раз те слагаемые, которые написал Заяц! И этих слагаемых будет бесконечно много!



— Но *сумма* всех этих слагаемых равна в точности *единице*! — воскликнула Алиса, показывая на рисунок. — Ведь это как раз длина всего отрезка!

— Ты права! — восхищенно произнёс Шляпник, разглядывая рисунок. — Теперь это даже *видно*!

Алиса была очень довольна: она сама не ожидала, что её доказательство окажется таким наглядным! А присмотревшись к рисунку, она заметила и кое-что ещё!

— Смотрите, — сказала она, — каждая следующая точка правее предыдущей, но все они левее *конца* отрезка! А *последней* точки перед концом вообще нет! Так же, как и нет последнего момента перед шестью часами...

— Но до конца отрезка всё-таки можно *дойти*! — воскликнул Шляпник. — Ведь смогла же ты *провести* эту линию... — он перевёл взгляд на застывшие стрелки часов, и тут в его взгляде родилась какая-то мысль.

Он схватил первое, что попалось ему под руку — это был Соня — и запустил в часы. Соня на лету развернулся и ловко ухватился за цепь, на которой висели часы — при этом он даже не проснулся!

Часы качнулись и... начали бить!

Алиса и Шляпник, как зачарованные, смотрели и слушали — смотрели, как раскачиваются часы со спящим Соней, и слушали, как они бьют. Заяц тоже оторвался от своей бесконечной писанины и, поражённый, уставился на часы.

Часы звучно пробили шесть раз, и в наступившей тишине стало слышно, что хрипение прекратилось, зато часы начали *тикать*! Скоро стало не только слышно, но и *видно*, что часы идут: большая стрелка сдвинулась и пошла по своему привычному кругу.

Минут через десять Алиса вежливо сказала:

— Наверное, я пойду...

Никто не ответил ей: Шляпник и Заяц замерли в неподвижности, слушая тиканье часов, как волшебную музыку, а Соня по-прежнему спал.

Алиса взяла блюдо (это был королевский подарок, и к тому же она любила посмотреться в зеркало!) и направилась к воротам. Выходя, она обернулась.

— Теперь тут всё стало *наоборот*, — подумала она. — Часы пошли, зато Шляпник и Заяц застыли как вкопанные!

Знакомой тропинкой Алиса пошла через поле и скоро увидела, что впереди на тропинке кто-то сидит.

— Это зверь или птица? — спросила себя Алиса. — Кажется, похоже и на то и на другое...

Подойдя ближе, она поняла, что это *Грифон*: голова и крылья у него были орлиные, а туловище — как у льва. Алиса хотела поздороваться с Грифоном, но он заговорил первым.

— Она ушла, — сообщил Грифон печальным голосом.

— Кто? — не поняла Алиса.

— Будто, — ответил Грифон.

— Будто ушла? — совсем запуталась Алиса. — А на самом деле не ушла? Но о ком это вы?

Она проследила за взглядом Грифона и увидела, что впереди по тропинке ползёт большая черепаха с телячьей головой и копытами. Черепаха уползала всё дальше и дальше.

— Так это *Черепаха Будто*! — догадалась Алиса*. — Вы с ней поссорились?

— Что ты! — горячо запротестовал Грифон. — Мы никогда не ссоримся!

— Так почему же она ушла? — удивилась Алиса.

— Не знаю, — сокрушенно ответил Грифон. — Я заснул на солнышке, а она ушла!

— Она, наверное, думает, что вы её догоните, — предположила Алиса. — Она ползёт медленно, а вы ведь бегаете быстро?

— Очень быстро! — глотая слёзы, подтвердил Грифон. — Но догнать её я всё равно не смогу...

— Почему? — удивилась Алиса.

— Пока я добегу до того места, где она сейчас находится, она уползёт *ещё дальше*! — воскликнул Грифон.

— Бегите и вы дальше! — посоветовала Алиса.

— Но пока я добегу до её *нового* положения, она опять *отползёт*, — возразил Грифон.

— Но раз вы бежите быстрее, чем она ползёт, в конце концов вы догоните её! — воскликнула Алиса.

— В том то и дело, что *конца не будет*, — горестно вздохнул Грифон, — каждый раз, когда я буду добегать до её нового положения, она будет отползать ещё дальше...

— Но расстояние между вами будет всё время

уменьшаться! — сказала Алиса.

— Будет, — согласился Грифон. — Оно будет становиться всё меньше и меньше... но *равным нулю* оно не станет *никогда*! — и он разрыдался.

Эта душераздирающая сцена напомнила Алисе что-то очень знакомое, но тут она увидела, что по тропинке со стороны дома Мартовского Зайца бежит Белый Кролик. Скоро послышались и его причитания:

— Как я опаздываю! Боже мой, как я опаздываю! Пробегая мимо Алисы и Грифона, Белый Кролик на бегу бросил:

— На суде быть всем обязательно!

— На каком суде? — вдогонку ему крикнула Алиса, но Кролик не обернулся.

— Не волнуйся, на суд тебя *приведут*, — успокоил Грифон Алису.

— А за что меня будут судить? — встревожилась Алиса.

— Судить, наверное, будут не тебя, — отозвался Грифон и посмотрел в ту сторону, откуда прибежал Белый Кролик. Потом он повернул голову и увидел, что Белый Кролик догнал Черепаху Будто, перебросился с ней несколькими словами и побежал вперёд.

— Он *догнал её*! И *перегнал*! — вскричал Грифон. — Значит, это *возможно*!

Меньше чем за минуту он догнал Черепаху Будто и чинно пошёл с ней рядом.

— Они тут все немного странные, — подумала Алиса. — Но в чём же была ошибка Грифона?

Размышляя об этом, она пошла дальше, надеясь догнать Грифона и Черепаху Будто — она-то знала, что это возможно! Но догнать их Алисе не удалось: через несколько шагов она подошла к развилке и остановилась, чтобы прочитать, что написано на столбе. К столбу были прибиты две стрелки, но *обе* они указывали в *одну* сторону — не в ту, куда пошли Черепаха Будто и Грифон. На одной стрелке было написано «ХА-ХА», а на другой «АХ-АХ».

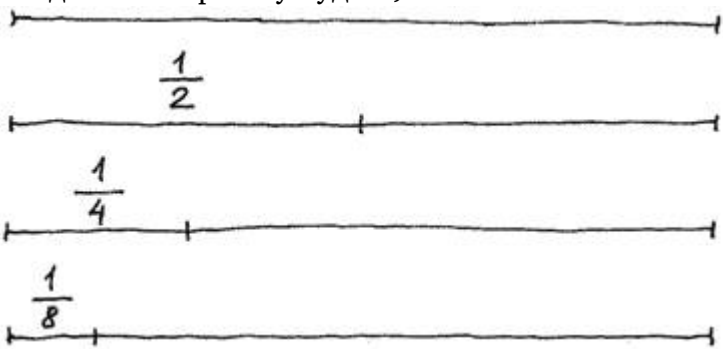
— Грифона и Черепаху Будто я ещё встречу на суде, — подумала Алиса, — а вот кто такие Ха-Ха и Ах-Ах, не мешало бы узнать!

И она пошла по тропинке, на которую указывали стрелки.

О БЕЗГРАНИЧНОЙ ДЕЛИМОСТИ И ЗАГАДКЕ ДВИЖЕНИЯ

В V веке до нашей эры в Древней Греции жил очень странный учёный: он прославился тем, что доказывал, будто *не может быть того, что есть*! Но даже самые великие из древних греков не могли найти ошибок в его рассуждениях.

Звали этого учёного Зенон. Например, он доказывал, что легендарный герой Ахилл, прекрасный бегун, не сможет догнать обыкновенную черепаху (рассуждения Зенона были очень похожи на рассуждения Грифона — помните, как тот сокрушался, что не сможет догнать Черепаху Будто?).



Вот как Зенон доказывал, что движение вообще невозможно. Прежде чем дойти до конца пути, говорил Зенон, надо дойти до *половины* пути. Однако прежде чем достигнуть половины пути, надо сначала пройти половину этой половины, то есть *четверть* пути, и так далее. А поскольку делить пополам можно без конца, то получается, что невозможно даже стронуться с места! Так же Зенон доказывал, что если кому-то все-таки удалось сойти с места, то дойти до конца пути ему никогда не удастся: ведь ему придётся пройти сначала половину всего пути, потом половину оставшейся половины и так далее... (помните рассуждения Алисы о том, что Соня не смог бы съесть весь торт?)

О Зеноне писал даже далёкий от математики Пушкин:

> Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
> Другой смолчал и стал пред ним ходить.
> Сильнее бы не мог он возразить;
> Хвалили все ответ замысловатый.

«Брадатый мудрец» — это и есть Зенон, а тот, который

смолчал и стал ходить — известный философ Диоген (тоже, кстати, странный человек: он жил в бочке, считая, что лучшего жилья философу и не надо, и ходил днём с фонарём, приговаривая: «Я ищу человека»).

Зенон, конечно, видел, что движение *есть*, но дело в том, что древнегреческие учёные не умели *описывать* движение! Ведь движение *непрерывно*: за очень малые промежутки времени движущееся тело проходит очень малые расстояния, причём промежутки времени и расстояния можно делить на всё меньшие и меньшие части. Но как раз *безграничной делимости* древние греки и не признавали! Они считали, что при этом разрушается понятие *числа* — главное понятие всей греческой математики.

Представьте себе, какая огромная разница между *целыми* числами и *дробными: у* любого целого числа есть два ближайших «целых» соседа (целое число, которое на единицу меньше, и целое число, которое на единицу больше), а между любыми дробными числами находится бесконечно много других дробных чисел — ни у одного дробного числа *ближайших* «дробных» соседей нет! (Не напоминает ли это вам отсутствие последнего момента перед шестью часами?)

А благодаря открытию Пифагора, о котором мы недавно рассказывали, обнаружилось, что существуют числа, которые невозможно записать *даже в виде дроби*! Действительно, какой дробью можно представить длину диагонали квадрата со стороной единица, если у диагонали нет *никакой* общей меры со стороной? Когда сам Пифагор осознал значение своего открытия, он даже испугался (хотя был олимпийским чемпионом по кулачному бою!) и потребовал от своих учеников, чтобы они ни в коем случае не разглашали это открытие. Один ученик ослушался, и, согласно легенде, боги покарали его за это: он

погиб во время кораблекрушения.

Страх перед безграничной делимостью длился почти два тысячелетия, и первые подходы к описанию непрерывного движения предприняли только Галилей и Декарт в XVII веке. (Мы уже писали о том, как Галилей открыл закон свободного падения тел). Становилось ясно, что для описания движения нужна совершенно новая математика, в которой возможность безграничной делимости принята за основу.

Создали такую математику в конце XVII века независимо друг от друга двое учёных — англичанин Ньютон и немец Лейбниц (хотя *друзьями-то* они как раз и не были!). Называется она *«дифференциальное и интегральное исчисление»*. Справедливость требует сказать ещё, что «почву» для великого немца и великого англичанина подготовили два великих француза — Ферма и Паскаль; в своих работах они подошли вплотную к открытию дифференциального и интегрального исчисления.

НЕБЫЛИЦА О ТОМ, КАК НЬЮТОН РАЗГАДАЛ ЗАГАДКУ ДВИЖЕНИЯ

Планеты, вороны, телеги, кометы,
Коты, водопады, слоны и моржи,
Пловцы, бегуны, тараканы, кареты,
Медведицы, реки, ужи и ежи —

Однажды все замерли, полные грусти,
Пытаясь загадку движенья понять.
Кто всю карусель эту снова запустит?
Кто миру движенье подарит опять?

И тут проходил мимо Ньютон случайно,
Увидел, что мир почему-то застыл,
Немного подумал, и как бы нечаянно
Загадку движения он разрешил.

Планеты, вороны, телеги, кометы,
Коты, водопады, слоны и моржи,
Пловцы, бегуны, тараканы, кареты,
Медведицы, реки, ужи и ежи —

Все снова помчались, пошли, побежали,
Кто влево, кто вправо, кто вверх, кто вперёд!
Вороны кричали, колёса визжали,
А Ньютона сразу толкнул пешеход.

КТО КОГО ВИДИТ В ЗЕРКАЛЕ?

Через четверть часа тропинка привела Алису к опушке леса, но прежде чем войти в лес, Алиса остановилась.

— А вдруг там водятся дикие звери? — спросила она себя.

Ответа не последовало, и Алиса задала новый вопрос:

— Может, лучше вернуться?

— Нет, — сразу же ответила себе Алиса. — Во-первых, идти вперёд интересней, чем назад, а во-вторых, как же я узнаю, кто такие Ха-Ха и Ах-Ах!

И Алиса вступила в лес. Она шла и прислушивалась: не слышно ли рычания диких зверей? И вдруг её настороженное ухо уловило звуки человеческого голоса. Или это были *два* голоса?

Тут лес расступился, и Алиса вышла на большую поляну. Посреди поляны два маленьких толстеньких человечка о чём-то спорили, широко размахивая руками. Человечки были очень похожи и к тому же повторяли движения друг друга.

— Это *один* человек разговаривает со своим отражением в зеркале! — догадалась Алиса.

Ей захотелось познакомиться со странным человечком, но он был такой маленький, что Алиса боялась его испугать.

— Хорошо бы мне уменьшиться раза в три, — подумала Алиса и... с трудом удержала блюдо, которое стало вдруг величиной с пол-Алисы!

— Я *уменьшилась*, а блюдо осталось *таким же, как было*, — сразу поняла Алиса.

Она прислонила блюдо к дереву, отошла на несколько шагов и увидела в блюде себя в полный рост.

— Мы с тобой тоже можем побеседовать, — предложила Алиса своему отражению, и они обе поправили прически. — Ты точно такая же, как я, и поэтому будешь во всём соглашаться со мною. Это, конечно, приятно, но, знаешь, немного скучновато! — Тут Алиса снова посмотрела на странного человечка. — А ведь он-то *спорит* со своим отражением! Пойду узнаю: о чём они спорят? Отходя от зеркального блюда, Алиса увидела, что её отражение тоже начало отходить куда-то вглубь.

— До встречи *на этом же самом месте*! — помахав рукой, сказала Алиса, и отражение приветливо ответило ей.

Подходя к человечку, Алиса с удивлением обнаружила, что зеркало повторяет его движения *не совсем точно*. А когда она подошла поближе, то увидела, что отражение пытается у человечка что-то *отобрать*!

— С *таким* зеркалом я бы побоялась связываться, —

подумала Алиса и вдруг догадалась, в чём дело.

— Это всё-таки *два* человека! — воскликнула она. — Но как они *похожи* друг на друга!

Человечки мигом прекратили возню, а предмет, из-за которого они готовы были подраться, со звоном упал на траву.

— Это мы-то похожи?! — в один голос вскричали они.

— Очень похожи, — подтвердила Алиса. — Таких похожих людей я не встречала ни разу в жизни!

— Но ведь у нас же нет ничего *одинакового*! — воскликнул один из человечков.

— *Совсем* ничего! — добавил другой. Приглядевшись, Алиса увидела, что у человечков, действительно, всё разное. И вообще, выглядели они более чем странно!

У каждого из них, например, было по *одному* башмаку с большим бантом, только у одного человечка башмак был на *левой* ноге, а у другого — на *правой*. Каждый человечек был одет в свитер, но у одного левая половина свитера была красная, а правая — синяя, а у другого наоборот: левая — синяя, а правая — красная. У одного из человечков на свитере большими белыми буквами было вышито «Ха-Ха», а у другого — «Ах-Ах». И, наконец, у каждого человечка было по синяку на лбу, но у одного — *слева*, а у другого — *справа*!

И всё-таки, посмотрев на человечков внимательнее, Алиса нашла, что у них общего.

— Вы оба в точности *одного роста*! — воскликнула она.

Человечки тут же померились ростом — Алиса оказалась права!

Тогда они удивлённо посмотрели сначала друг на друга, а потом на Алису.

— Почему у каждого из вас башмак только на *одной* ноге? — решила продолжить разговор Алиса.

— Наши старые башмаки совсем износились... — начал объяснять один из человечков.

— Ой! — перебил его другой. — *Я не забыл*!

— Вот видишь, — укоризненно сказал первый. — А ведь сегодня твоя очередь!

— *Не бегу*! — отозвался второй и тут же умчался.

— Какой-то он немного странный, — заметила Алиса, проводив взглядом убежавшего человечка.

— Мой братец Ах-Ах всегда всё переворачивает наоборот, — объяснил оставшийся человечек (судя по имени, вышитому на свитере, это был Ха-Ха).

— Он так любит обманывать? — удивилась Алиса.

— *Совсем* не любит, — отозвался Ха-Ха. — Это у него просто

от упрямства!

— Как же вы его понимаете? — спросила Алиса.

— Всё, что говорит Ах-Ах, я переворачиваю обратно, только и всего! — со смехом ответил Ха-Ха.

— Но если вы с братом так хорошо понимаете друг друга, из-за чего же вы спорили? — поинтересовалась Алиса.

— Из-за подарков, — ответил Ха-Ха. — У нас сегодня общий день рождения.

— Поздравляю! — сказала Алиса. — Так вы, наверное, не могли поделить подарки?

— Почему не могли? — удивился Ха-Ха. — Я подарил Ах-Аху свою погремушку, а он мне — свои часы.

— Вам повезло больше, — заметила Алиса. — Часы лучше, чем погремушка.

— Смотря *какие* часы и *какая* погремушка, — возразил Ха-Ха. — Ах-Аху моя погремушка понравилась, а мне его часы — нет!

— Почему? — удивилась Алиса.

Вместо ответа Ха-Ха нагнулся, поднял предмет, из-за которого братья спорили, и протянул его Алисе.

Это были часы. Однако таких странных часов Алиса не видела никогда! Все цифры, за исключением нуля и восьмерки, были написаны *наоборот*, и к тому же числа на циферблате шли в *обратном* порядке: после перевёрнутого числа «12» шло перевёрнутое «11», потом «10»... и так до «1».

Пока Алиса рассматривала часы, минутная стрелка сдвинулась, и Алиса увидела, что стрелка движется не по «часовой стрелке», а в *противоположную* сторону!

— Ну скажи, зачем мне такие часы? — спросил Ха-Ха. — Я пытался вернуть их обратно, но Ах-Ах ни за что не хотел их брать!

— Возвращать подарок не очень хорошо, — заметила Алиса.

— Я надеюсь, что Ах-Ах подарит мне тогда что-нибудь другое, — признался Ха-Ха.

— А куда он побежал? — спросила Алиса.

— К Шляпнику, — ответил Ха-Ха. — Я же тебе начал рассказывать: наши старые башмаки совсем износились...

— Но разве Шляпник шьёт башмаки? — перебила Алиса. — По-моему, он шьёт шляпы!

— Вот мы и заказали ему шляпы для ног, — сказал Ха-Ха.

— *Шляпы для ног*? — не поверила своим ушам Алиса.

— А почему бы и нет? — рассмеялся Ха-Ха, видя изумление Алисы. — Разве нельзя снять мерку с ноги и сшить для неё шляпу?

— Так вот почему у них на башмаках такие банты! — поняла Алиса. — Это, оказывается, не башмаки, а шляпы для ног...

— Сначала мы заказали Шляпнику только одну пару, — продолжал Ха-Ха, — потому что хотели проверить, как он шьёт шляпы для ног — дело это для него оказалось новым!

— И эту одну пару вы разделили на двоих? — спросила Алиса, показывая на одну обутую ногу Ха-Ха.

— Мы *всё* делим на двоих, — ответил Ха-Ха. — Так вот, шляпы оказались очень удобными, и мы заказали вторую пару — сейчас Ах-Ах за ней и побежал!

— Тогда надо было дать ему и второй башмак... то есть, шляпу для второй ноги, — заметила Алиса. — В шляпе на одной ноге бежать неудобно!

Вместо ответа Ха-Ха покатился со смеху.

— Не понимаю, что я сказала смешного? — обиделась Алиса.

— Если бы Ах-Ах надел на вторую ногу *эту* шляпу, — пояснил Ха-Ха, показывая на свою обутую ногу, — бежать ему было бы намного неудобнее!

— Почему? — не поняла Алиса.

— Эта шляпа на целых два размера меньше его ноги, — сказал Ха-Ха.

— У вас и Ах-Аха разный размер ног? — догадалась Алиса.

— У *каждого* из нас разный размер, — ответил Ха-Ха.

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— У меня *правая* нога больше, чем *левая*, а у Ах-Аха — наоборот, — пояснил Ха-Ха. — Мы заказали сначала *меньшую* пару — мне досталась шляпа на левую ногу, а Ах-Аху — на правую. Но вторую пару шляп для ног мы никак не можем получить!

— Почему? — спросила Алиса.

— Шляпника почему-то уже целую неделю нет дома, — развёл руками Ха-Ха. — Мы с братом бегаем к нему каждый день — сегодня как раз очередь Ах-Аха.

— Шляпник всё это время был в гостях у Мартовского Зайца! — рассмеялась на этот раз Алиса. — Они пили чай.

— *Всю неделю*? — поразился Ха-Ха.

— У Зайца часы остановились, — объяснила Алиса, и Ха-Ха снова расхохотался.

— Но теперь часы пошли опять, — сказала Алиса, — так что Шляпник, наверное, уже вернулся домой.

— Значит, Ах-Ах принесёт, наконец, вторую пару шляп для ног! — обрадовался Ха-Ха.

И тут у Алисы родилась прекрасная мысль.

— Я думаю, что Ах-Ах далеко не убежал, — сказала она, пряча улыбку.

— Убежал! — уверенно возразил Ха-Ха. — Он даже в одной

шляпе бегает быстро!

— А мне кажется, что он сейчас вон под тем деревом, — сказала Алиса. — Хотите, я вам его покажу?

— Не может быть! — воскликнул Ха-Ха. — Идём!

И Алиса повела Ха-Ха к зеркальному блюду, которое стояло у дерева на краю поляны.

Как только Ха-Ха увидел в блюде своё отражение, он бросился к нему с кулаками:

— Ах-Ах! Что ты здесь делаешь? Почему ты не побежал к Шляпнику? Это нечестно! Сейчас я тебе...

«Ах-Ах», конечно, тоже бросился навстречу Ха-Ха. Раздался звонкий удар, и Ха-Ха сел на траву, потирая лоб, на котором вспухала новая шишка. Блюдо после удара гудело.

— Не ной! — сердито сказал Ха-Ха, глядя в блюдо. — Сам виноват! И не передразнивай меня! — вскричал он и снова бросился к блюду, но на этот раз Алиса успела его удержать.

— Это не Ах-Ах, — смеясь, сказала она. — Я просто пошутила: это ваше собственное отражение в зеркале!

— Не знаю я никакого зеркала! — кипятился Ха-Ха. — Смотри, — показал он в блюдо, — у него даже на свитере написано, что это Ах-Ах!

Тут Алисе пришла в голову новая мысль: она протянула Ха-Ха часы — подарок Ах-Аха и предложила:

— Если вы уверены, что это Ах-Ах, попробуйте вернуть ему эти часы!

Ха-Ха взял часы и, изумленный, застыл перед блюдом: он увидел, что Ах-Ах держит часы с обычным, *правильным* циферблатом!

— Вот за *этот* подарок я скажу тебе спасибо! — обрадовался Ха-Ха. — А свои часы возьми всё-таки обратно...

Ха-Ха и «Ах-Ах» протянули часы друг другу, но часы «случайно» столкнулись. Ха-Ха поднял свои часы выше, но «Ах-Ах» сделал то же самое, и часы опять столкнулись. Ха-Ха протягивал часы то левее, то правее, но часы неизменно сталкивались друг с другом!

— Какой ты неловкий! — с чувством упрекнули, наконец, друг друга Ха-Ха и «Ах-Ах».

Алиса от души посмеялась, наблюдая эту сцену, и решила объяснить Ха-Ха, что такое отражение в зеркале.

— Пусть он увидит *моё* отражение, — подумала она. — Ведь оно-то *в точности* такое же, как я сама!

Алиса стала рядом с Ха-Ха и показала на блюдо.

— Смотрите! — сказала она. — Теперь там появилось и моё отражение.

— Кто-то там действительно появился, — подтвердил Ха-Ха, вглядываясь в блюдо, — но это *не ты*!

— Ну как же не я, — мягко возразила Алиса. — У той девочки точно такие же глаза, волосы, платье...

— Она действительно очень похожа на тебя, — согласился Ха-Ха, — но всё-таки она — не ты! Смотри: у тебя родинка на левой щеке, а у неё — на правой, — Ха-Ха перевёл глаза с блюда на Алису и обратно. — Да и бант у тебя и у неё завязан по-разному!

— И всё-таки это мое отражение, — убеждала Алиса. — Оно повторяет все мои движения! Смотрите: я поднимаю правую руку...

— А она поднимает *левую*! — вскричал Ха-Ха, показывая на блюдо. — Я же говорю: она — не ты!

Алиса с удивлением обнаружила, что Ха-Ха прав: девочка в зеркальном блюде действительно *отличалась* от неё! Тогда Алиса сказала:

— Сейчас *я* высуну язык, и *она тоже* высунет язык!

— Да она просто издевается над тобой! — возмутился Ха-Ха, глядя в блюдо на девочку с высунутым языком, но в это время послышался голос Ах-Аха:

— Ха-Ха! Где ты? Ха-Ха!

Ха-Ха недоуменно уставился на блюдо, не зная, чему верить — глазам или ушам? Голос Ах-Аха громко кричал: «Ха-Ха! Ха-Ха!», но *сам* Ах-Ах молча стоял перед ним, и выражение лица у него было растерянное и даже глуповатое.

— Смотрите! — смеясь, показала Алиса на поляну, по которой бегал Ах-Ах, ища брата.

Ха-Ха несколько раз перевел изумленный взгляд с блюда на поляну и обратно. С каждым разом его взгляд становился всё более осмысленным, и, наконец, стал озорным: Ха-Ха понял, в чём дело!

Он тут же спрятался за блюдо и попросил Алису:

— Позови его сюда!

— Ах-Ах! — крикнула Алиса и помахала рукой. — Ха-Ха здесь!

Ах-Ах помахал в ответ и направился к Алисе. Он был уже в двух башмаках-шляпах и ещё один башмак-шляпу держал в руке.

— Где же Ха-Ха? — спросил Ах-Ах, подойдя к Алисе.

— Вот он, — показала она на блюдо.

— Откуда ты взял шляпы для ног? — удивился Ах-Ах, посмотрев на свое отражение в блюде.

— *Угадай*! — предложил Ха-Ха из-за зеркального блюда.

Этот ответ привел Ах-Аха в полное замешательство: он видел,

что Ха-Ха говорит, не раскрывая рта!

— А если не угадаешь, — продолжал, не раскрывая рта, «Ха-Ха», — ты заберёшь свои часы обратно! Согласен?

Ах-Ах немного подумал и махнул рукой:

— Не согласен!

— Значит, *согласен*, — вскричал Ха-Ха, выскакивая из-за блюда и протягивая часы Ах-Аху.

Изумлению Ах-Аха не было границ! Наконец, он догадался потрогать рукой Ха-Ха и своё собственное отражение. И тогда сразу стало ясно, какой из двух Ха-Ха настоящий: один был мягкий и тёплый, а другой протягивал навстречу Ах-Аху руку с пальцами, твердыми и холодными, как металл!

Когда Ах-Ах разобрался, в чём дело, все трое расхохотались. А потом Ха-Ха стал рассказывать Ах-Аху, как он дрался со своим собственным отражением и пытался обменяться с ним часами. Рассказывая, Ха-Ха всё показывал. Никогда в жизни Алиса так не смеялась!

Когда все успокоились, братья с Алисой стали перед зеркальным блюдом — Алиса в середине, а братья по сторонам.

— Почему всё-таки твоё отражение похоже на тебя, а мы с Ах-Ахом превращаемся друг в друга? — спросил Ха-Ха.

— Зеркало *меняет местами «лево» и «право»*, — сказала Алиса, вспомнив, как она поднимала правую руку, а её отражение — левую. — У меня левая и правая стороны почти одинаковы, а у каждого из вас левая сторона похожа на правую сторону другого, и наоборот.

— Это, наверное, большая редкость, когда левая сторона такая же, как правая? — предположил Ха-Ха, с уважением глядя на Алису.

— Скорее наоборот, — взглянув по сторонам, отозвалась Алиса. — Смотрите — так устроено всё вокруг: деревья, листья, цветы, бабочки... — Тут её осенила поразительная догадка, и она воскликнула: — Вот почему мир, который виден в зеркале, так похож на настоящий!

— И всё-таки «зеркальный мир» *не совсем* такой, как наш, — заметил Ха-Ха. — Нормальные часы превращаются в зеркале в такие часы, какие мне пытался всучить в подарок мой братик. Кстати, — обратился он к Ах-Аху, — неужели в день рождения ты оставишь меня без подарка?

Ах-Ах вздохнул и вытащил из-под свитера книгу.

— *Не бери*, — сказал он, протягивая книгу Ха-Ха. — Это моя *нелюбимая* книга. В ней совсем *нет* картинок.

Ха-Ха с радостью принял подарок. Но когда он раскрыл книгу, лицо его вытянулось. Алиса заглянула через плечо Ха-Ха и

увидела, что в книге много картинок, но слова и даже буквы совершенно непонятные.

— Как же я буду её читать? — растерянно листал книгу Ха-Ха. — Неужели только картинки смотреть?

Вдруг Алиса заметила, что на одной из картинок нарисован человек, который ест, держа вилку в *левой* руке.

— Наверное, он левша, — решила Алиса, но тут она вспомнила о странных часах Ах-Аха!

— Вы сможете эту книгу и читать! — воскликнула она, обращаясь к Ха-Ха.

— Как? — удивился тот.

Алиса взяла у него книгу и, раскрыв ее, поднесла к зеркальному блюду. В блюде отразилась страница с *обычным* текстом, а человек, нарисованный на картинке, «переложил» вилку в правую руку!

Ха-Ха просиял, но не надолго.

— А как я буду читать эту книгу, когда ты уйдёшь? — грустно спросил он. — Ты ведь унесёшь блюдо с собой...

— Я бы оставила блюдо вам, — сказала Алиса, — но это королевская награда!

В этот момент на поляну, запыхавшись, выбежал Белый Кролик.

— Мы уже опаздываем! — закричал он, увидев Алису. — Вот-вот начнётся приём у Королевы Червей, а мы ещё здесь! Если мы опоздаем, мы можем остаться без королевской награды!

— Королева Червей даёт награды всем гостям? — удивилась Алиса.

— Не всем, — уклончиво ответил Белый Кролик. — Но зато это очень хорошие награды!

— Я оставлю блюдо вам, — сказала Алиса, повернувшись к братьям. — У меня должны быть свободными руки, — подумала она. — Ведь иначе я не смогу принять награду Королевы Червей, и она обидится!

Белый Кролик тоже посмотрел на братьев — посмотрел очень внимательно: окинул их взглядом с головы до ног (особенно внимательно он посмотрел почему-то на ноги).

— Королева Червей очень добрая, — сказал вдруг Ах-Ах. — Она никогда не приказывает рубить гостям головы!

— Поэтому будь начеку! — добавил Ха-Ха.

— Довольно странная доброта, — подумала Алиса. — И почему я должна быть начеку?

Она хотела спросить об этом, но Белый Кролик очень торопил её. Алиса попрощалась с братьями и вместе с Белым Кроликом побежала по тропинке.

Скоро они выбежали к лесному озеру. Алисе показалось, будто посреди леса лежит огромное зеркало: деревья отражались так чётко, что их отражения трудно было отличить от настоящих деревьев. Если не считать, конечно, того, что одни деревья росли *вверх*, а другие — *вниз*!

— Значит, зеркало может менять местами не только *«лево»* и *«право»*, но *«верх»* и *«низ»* тоже! — мелькнуло в голове у Алисы.

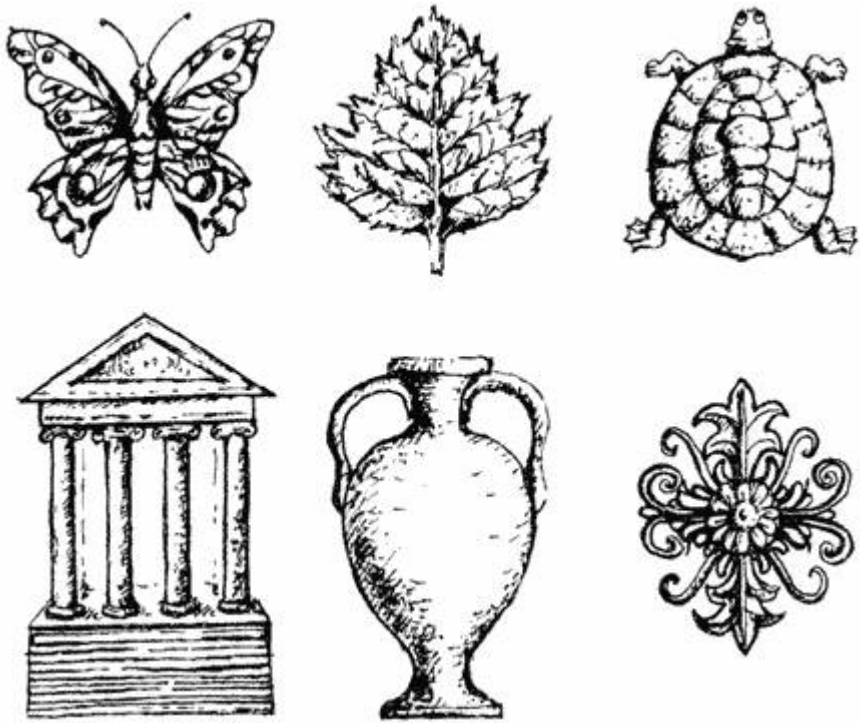
Но подумать об этом как следует она не успела, потому что Белый Кролик повёл её к берегу. Там их уже ждала маленькая лодочка.

ЧТО ТАКОЕ СИММЕТРИЯ?

Есть ли кто-нибудь в целом мире, кто был бы больше похож на вас, чем ваше собственное отражение в зеркале? Но присмотритесь — человек «за зеркалом» всё-таки отличается от вас! Например, часы он носит на *другой* руке, да и пуговицы на одежде застегнуты у него на *другую* сторону...

Сходство-различие нашего настоящего мира и «зазеркалья» привлекало во все времена детей, учёных и сказочников. А Льюис Кэрролл, который был и учёным и сказочником, сделал его главным мотивом своей замечательной сказки «Алиса в Зазеркалье».

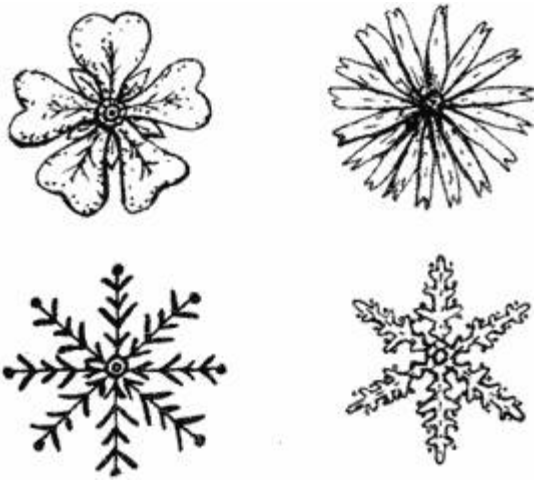
«Зазеркальный мир» так похож на настоящий, что если сделать «зеркальную фотографию» — для этого достаточно перевернуть негатив — то почти никто не сможет отличить такую фотографию от правильной (если, конечно, на ней не будет вывесок!).



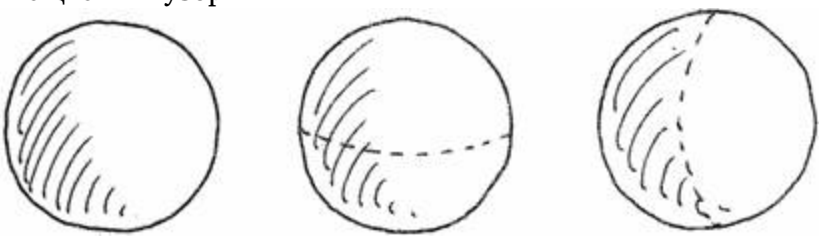
Разгадка удивительного сходства двух миров — «зазеркального» и настоящего — состоит в том, что почти все предметы вокруг нас обладают *зеркальной симметрией*. Это означает, что левая и правая стороны у них одинаковы. (А если некоторые различия всё-таки есть, то благодаря им можно отличить зеркальное отражение от самого предмета — помните родинку на щеке у Алисы и её бант?)

Понятие симметрии родилось применительно к искусству: само слово «симметрия» означает по-гречески «гармония», «соразмерность». Действительно, симметричные предметы кажутся нам красивыми. И не только нам: все народы во все времена старались сделать симметричными здания, узоры и скульптуры.

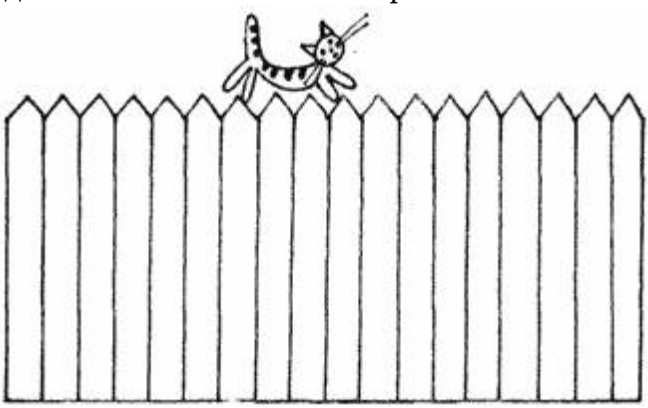
Обычно говорят, что предмет обладает симметрией, если с ним можно что-то сделать, но он при этом останется *таким же*. Например, если можно незаметно поменять левую и правую стороны предмета, то он обладает зеркальной симметрией. Такой же симметрией обладает и предмет, у которого можно незаметно поменять «верх» и «низ».



Симметрия может быть не только зеркальной. Многие предметы не изменяются, если *повернуть* их на какой-то угол. Например, любую снежинку можно повернуть на одну шестую часть полного оборота, и после этого никто не отличит её от неповернутой! Такой же «поворотной симметрией» обладают многие цветы и узоры

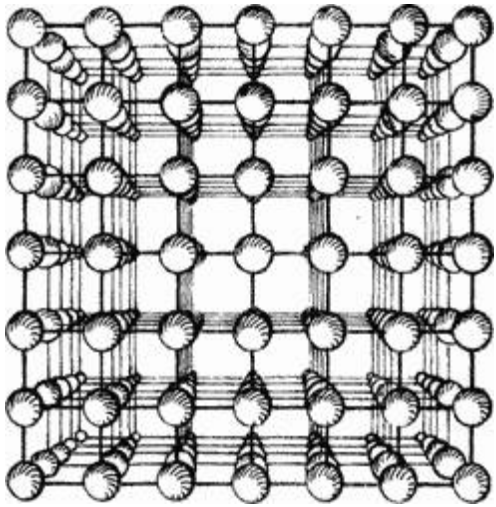


А вот шар можно поворачивать как угодно, да ещё у него можно менять левую и правую стороны или верхнюю и нижнюю — он останется тем же шаром! Поэтому говорят, что шар обладает самой высокой симметрией



Ещё один вид симметрии связан с *переносом*: например, если идти вдоль забора, он «не изменяется». Таким же видом симметрии обладают узоры на обоях. Эта симметрия называется

«переносной»



Переносная симметрия является главным свойством всех *кристаллов*: атомы в кристаллах расположены в совершенно правильном порядке. На этом рисунке изображена модель одного из кристаллов (шарики обозначают отдельные атомы). Полный перечень всех возможных видов симметрии кристаллов составил русский учёный Фёдоров; таких видов оказалось 230

До работы Фёдорова симметрией, в основном, интересовались математики, художники и архитекторы: математики — потому что они вообще интересуются любыми закономерностями, а художники и архитекторы — красоты ради. Однако в XX веке симметрией всерьёз заинтересовались и физики — они догадались, что симметрия многих *предметов* вокруг нас обусловлена симметрией *законов природы*!

Тогда физики начали искать новые виды симметрии — и нашли, причём неожиданно много. Знаменитые слова Галилея о том, что природа говорит с нами на языке математики, подтвердились опять.

Новые виды симметрии поражают воображение.

Например, у каждой элементарной частицы (мельчайшей частицы вещества) есть двойник — *античастица*, причем частица и античастица действительно напоминают зеркальных двойников — например, у них одинаковые массы (помните одинаковый рост у Ха-Ха и Ах-Аха?). А вот, скажем, электрические заряды у частицы и античастицы имеют противоположные знаки: если одна из них заряжена положительно, то другая — отрицательно. Так вот, если при каком-то столкновении частиц заменить все частицы на античастицы, то столкновение будет «выглядеть» точно так же — согласитесь, что это и правда очень похоже на сходство нашего

мира с «Зазеркальем», только при новом виде «отражения» частицы переходят в античастицы.

Кстати «обычная» зеркальная симметрия тоже преподнесла физикам неожиданный сюрприз: оказалось, что «зазеркальный» мир на самом деле *отличается* от настоящего! Американские физики Ли и Янг изучили радиоактивный распад ядер некоторых атомов, и... обнаружилось, что точной симметрии между правым и левым в законах природы нет! Правда, нарушение зеркальной симметрии оказалось очень слабым — оно проявляется только в так называемых «слабых взаимодействиях» элементарных частиц, но удивительно то, что Природа отказалась всё-таки от точной симметрии!

НЕБЫЛИЦА О ПРИРОДЕ, КОТОРАЯ УЗНАЛА, ЧТО ЕСТЬ РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ЛЕВЫМ И ПРАВЫМ

Природа не знала, где лево, где право,
И даже не знала, зачем это знать.
Века пролетали в трудах и забавах,
И звёзды рождались и гасли опять.

Но вот на какой-то далёкой планете
Какие-то физики вдруг завелись.
Они любопытными были как дети,
И вот как с Природой они обошлись:

Где лево, где право, они разгадали —
Для этого в атом пришлось им залезть.
Всё это Природе потом втолковали,
Причём повторили раз пять или шесть.

Где лево, где право, теперь она знает,
Но знание это мешает ей спать —
Полночи Природа не спит и решает:
С какой же ноги ей назавтра вставать?

ЗА́МОК, КОТОРЫЙ НЕВОЗМОЖНО ОБОЙТИ

Когда Алиса и Белый Кролик сели в лодку, Кролик взялся за вёсла и первым же взмахом обдал Алису брызгами с головы до ног.

— Как же я появлюсь теперь на королевском приёме в мокром платье? — огорчилась она. — Впрочем, до приёма мы, наверное, не доберёмся...

И действительно, хотя Кролик изо всех сил бил вёслами по воде, лодка только крутилась на месте, несмотря на все усилия Алисы, которая пыталась править, сидя в облаке брызг.

— Ты совсем не умеешь править! — упрекнул, наконец, Кролик Алису.

— Давайте поменяемся местами, — сразу же предложила Алиса.

Когда они пересаживались, лодка сильно качнулась. Алису это не испугало — плавать она умела, а её платье всё равно уже стало мокрым от брызг, но Кролик от страха часто-часто застучал зубами. Алису это так рассмешило, что она никак не могла начать грести.

— Мы с-т-т-т-трашно опазды-ды-дываем! — напомнил Кролик.

Алиса налегла на вёсла, и лодка двинулась вперёд. Белый Кролик успокоился и стал править с таким важным видом, будто вёл не лодочку, а корабль. Скоро он увидел что-то впереди и с волнением воскликнул:

— Приём уже начинается!

Теперь Алиса пожалела, что сидела на вёслах: смотреть *вперёд* ей было очень неудобно, да к тому же она боялась свернуть шею перед королевским приёмом.

— Предстать перед королевой в мокром платье да ещё со свёрнутой шеей совсем некрасиво, — рассудила она. — Что королева обо мне подумает?

Минут через пять лодка пристала к берегу. Алиса и Кролик выскочили и сразу оказались в толпе странных существ: туловище у них было прямоугольным и плоским, а на спине у всех был одинаковый узор.

— Это *карты*! — догадалась Алиса. — Ведь приём устраивает Королева *Червей*!

Тут она обнаружила, что Белый Кролик куда-то исчез. Ей захотелось с кем-нибудь познакомиться, и она сделала реверанс

Трефовым Королю и Королеве, но они удостоили Алису только коротким кивком. Зато Валет Червей, увидев Алису, снял шляпу и, поклонившись, сделал шляпой широкий жест. В ответ Алиса улыбнулась и решила, что может начать разговор первой.

— Вы не знаете случайно, по какому поводу Королева Червей устраивает сегодня приём? — спросила она так, будто ей каждый день приходится бывать на королевских приёмах.

— По поводу окончания строительства нового королевского за́мка, — ответил Валет и показал на странное сооружение, возвышавшееся на ближайшем холме.

Алисе случалось видеть за́мки — и нарисованные, и даже настоящие, но такого за́мка она не видела никогда! На вершине холма стоял дом, весь окруженный колоннами — Алиса вспомнила, что похожие дома она видела на рисунках в учебнике Древней истории. От дома с колоннами отходили три широкие крепостные стены с прямоугольными зубцами. Эти стены соединяли дом с тремя ещё более загадочными строениями: одно из них напоминало по форме египетскую пирамиду, второе — величественный торт с правильными очертаниями, а третье — огромную круглую чашу, только перевёрнутую. «Пирамида», «торт» и «чаша» тоже были соединены друг с другом крепостными стенами.

Алиса хотела спросить Валета, почему за́мок имеет такой странный вид, но тут зазвучали фанфары. Все замолчали, и в наступившей тишине чей-то голос торжественно произнёс:

— Король и Королева Червей!

Алиса стала на цыпочки, чтобы увидеть Короля и Королеву, но Валет тихо сказал:

— Склони голову, если не хочешь, чтобы Королева приказала отрубить её!

Алиса наклонила голову и исподлобья посмотрела по сторонам: все стояли, низко склонив головы.

— Так вот что имел в виду Ах-Ах, когда говорил, что Королева Червей очень добрая и никогда не приказывает рубить головы! — только сейчас догадалась Алиса. — Ведь его слова надо понимать наоборот! Но неужели Королеве приятней видеть затылки, чем лица?

В это время послышались чёткие шаги.

— Это похоже на строй солдат, а не на Короля и Королеву, — с удивлением подумала Алиса, и голова её поднялась сама собою.

Взгляд Алисы сразу же встретился со взглядом Королевы Червей — она шла под руку с Королём, а за ними строем маршировали младшие карты — от двойки до десятки. Они держали алебарды, и вид у них был довольно устрашающий.

— Ты кто? — спросила Королева резким голосом и остановилась.

Алиса вежливо представилась.

— Это та девочка, о которой нам рассказал Белый Король, — напомнил Король Червей Королеве. — Вы захотели с ней познакомиться и приказали привести её на приём.

— *Привести? Меня?!* — возмущенно воскликнула Алиса, забыв о всякой осторожности. — Если бы я знала, что меня приказали привести, я бы ни за что не пришла!

Королева гневно сверкнула глазами, но Король коснулся её руки и объяснил Алисе:

— Королева приказала Белому Кролику привести тебя, потому что ты сама не знала дороги.

— Тогда другое дело, — сказала Алиса, удивляясь собственной смелости.

— *Дела́* будем слушать на суде, — отрезала Королева. — А сейчас, — громко крикнула она, — мы все идём осматривать новый королевский за́мок!

Король пригласил Алису идти рядом с ним и Королевой, и они направились в сторону нового королевского за́мка. За ними последовали стражники с алебардами, а за стражниками — все гости.

— Почему новый королевский за́мок имеет такой странный вид? — спросила Алиса.

— Мой архитектор — большой чудак! — пожала плечами Королева.

— Он *любитель математики*, — уточнил Король.

— Но при чём здесь математика? — удивилась Алиса, показывая на диковинные башни за́мка.

— По замыслу архитектора за́мок должен напоминать о тех странах, где зародилась математика, — пояснил Король. — Средняя башня, например, построена в форме древнегреческого храма...

— Понятно, — со знанием дела кивнула Алиса. — В Древней Греции все, наверное, были математиками!

— Почему ты так решила? — удивилась Королева.

— В учебнике математики нарисовано больше древних греков, чем в учебнике истории, — объяснила Алиса.

— В Древней Греции математику действительно уважали, — подтвердил Король. — А своими учителями в математике греки считали египтян, — показал он на «египетскую пирамиду». — Однако ученики намного превзошли своих учителей!

— А торт? — спросила Алиса, показывая на другую башню за́мка.

— Это не торт, — улыбнулся Король. — Это уменьшенная копия знаменитой Вавилонской башни. Древние вавилоняне умели хорошо вычислять — в этом они превзошли даже греков!

— А перевёрнутая чаша? — поинтересовалась Алиса.

— Это копия индийского храма, тоже уменьшенная, — ответил Король. — Индийцы изобрели нуль и все остальные цифры, которыми мы пользуемся.

— А почему о нуле вы говорите отдельно? — удивилась Алиса.

— О, нуль — это самая главная из всех цифр! — воскликнула Королева. — Не будь нулей, нельзя было бы отличить единицу от миллиона!

— И правда, — подумала Алиса. — Единицу в *миллион* превращают *нули*! Может быть, ещё и потому Шалтай-Болтай захотел стать нулём?

Тут она вспомнила о стене, идущей вдоль дороги для королевских прогулок, и об отрицательных числах, которые так удивили её. Алиса решила воспользоваться случаем и показать, что она тоже кое-что знает по математике.

— А кто изобрёл отрицательные числа? — спросила она.

— Китайцы, — сразу же ответил Король.

— Но почему ты спрашиваешь об этих числах? — прищурившись, поинтересовалась Королева.

— Отрицательных чисел бесконечно много, — охотно объяснила Алиса. — Вот я и думаю: почему же в вашем новом за́мке нет ничего китайского?

— Это действительно странно, — согласилась Королева. — Придётся отрубить голову моему архитектору!

— Ой! — ужаснулась про себя Алиса. — И зачем я вспомнила об отрицательных числах?

— Вы не обратили внимания на *стены* за́мка, — сказал Король, обращаясь к Королеве. — Эти стены — уменьшенные копии Великой Китайской стены, и они соединяют каждую башню за́мка со всеми остальными башнями!

— Стены такие широкие, что по ним можно гулять, — заметила Алиса, довольная, что опасность для архитектора миновала.

Войдя в за́мок, гости на время забыли о суровости Королевы и стали с любопытством расхаживать по стенам и заходить в башни.

Алиса тоже пробежала по всем стенам и побывала во всех башнях. За́мок был построен так искусно, что Алисе показалось, будто она и вправду побывала сразу в Греции, Вавилоне, Египте, Индии и Китае!

Притомившись, Алиса остановилась под колоннами «греческого храма»: отсюда было хорошо видно, как по стенам за́мка снуют гости.

— Тебе нравится мой новый за́мок? — раздался вдруг над самым ухом Алисы голос Королевы Червей.

— Очень нравится, — чуть вздрогнув, ответила Алиса.

— Я прикажу, чтобы моему архитектору не рубили голову, — милостиво произнесла Королева.

— За что? — не поняла Алиса.

— За то, что он построил этот за́мок, — сказала Королева.

— За это рубить голову? — поразилась Алиса.

— За это *не* рубить голову! — воскликнула Королева, начиная сердиться. — Если кто-то хочет, чтобы ему не отрубили голову, он должен заслужить это: ведь голова — это королевская награда!

— Так вот о какой королевской награде говорил Белый Кролик! — вспомнила Алиса, и ей стало немного не по себе.

Вдруг Королева пошатнулась.

— Что с вами, дорогая? — озабоченно спросил Король Червей: он сразу же оказался возле Королевы и поддержал её.

— От всего этого мелькания у меня закружилась голова, — показала Королева на гостей, разгуливающих по стенам. — Прикажите им: пусть ходят по одному и медленно!

— А не станет ли тогда скучно? — усомнился Король.

— Давайте устроим какую-нибудь игру! — предложила Алиса.

— Это прекрасная мысль! — оживилась Королева.

— Вы так любите играть? — спросила Алиса, радуясь изменению настроения Королевы.

— Я люблю *выигрывать*! — ответила Королева.

— Я тоже люблю выигрывать, — призналась Алиса. — Но ведь на то и игра, что заранее не известно, кто выиграет!

— *Мне* интересней играть, когда заранее известно, что выиграю я! — заявила Королева.

— Зачем же тогда вообще играть? — удивилась Алиса.

— Я придумал интересную игру, — неожиданно произнёс Король.

— Слушайте Короля! — крикнула Королева, и все замерли.

— Сейчас мы сыграем в новую игру, — объявил Король. — Пусть каждый из вас попробует обойти весь за́мок, но так, чтобы *по каждой стене за́мка пройти только один раз*!

— Тот, кто это сделает, получит королевскую награду! — пообещала Королева.

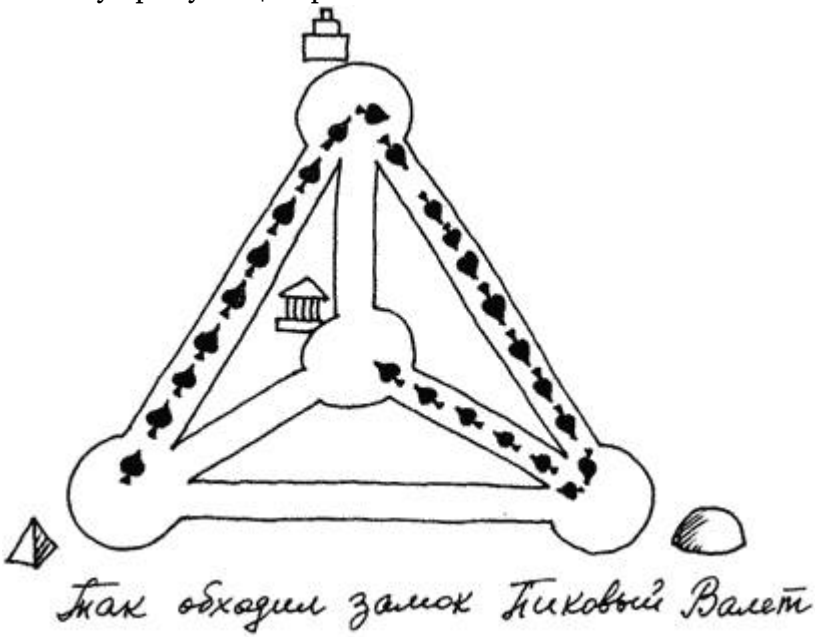
Гости почему-то не выразили особого восторга щедростью Королевы, но это не смутило её.

— Иди ты первым! — приказала Королева, указывая на Пикового Валета.

— С какой башни начинать обход? — спросил Валет.

— *С любой*, — разрешил Король, окинув взглядом весь за́мок.

Валет начал с «египетской пирамиды», прошёл к «вавилонской башне», от неё — к «индийскому храму», а оттуда к «греческому храму» в центре за́мка.



Подойдя к Королю и Королеве Червей, Валет доложил:

— Я обошёл весь за́мок и по каждой стене прошёл только один раз.

— По каждой стене, *по которой ты шёл*, ты действительно прошёл только один раз, — сказал Король. — Но по условиям игры надо пройти *по каждой стене за́мка*, а ты прошёл только по *трём* стенам из *шести*.

— Значит, идти дальше? — спросил Валет.

— Иди, — отозвался Король. — У тебя даже есть выбор: ты можешь пойти сейчас к «вавилонской башне», а можешь — к «египетской пирамиде».

Валет посмотрел в сторону «вавилонской башни», а затем — в сторону «египетской пирамиды».

— Куда же ему лучше идти? — спросила себя Алиса и мысленно повторила путь, пройденный Валетом. — Если он пойдёт к «вавилонской башне», то выйти из неё он не сможет, потому что все три стены, ведущие к этой башне, будут уже пройдены... значит, он должен идти к «египетской пирамиде»!

Она с волнением следила за Валетом, не зная, как подсказать

ему, куда надо идти, но он, кажется, догадался сам, потому что повернул именно в сторону «египетской пирамиды».

От «пирамиды» Валет мог идти только к «индийскому храму». Но тут ему пришлось остановиться: все три стены, идущие от «индийского храма», были им уже пройдены!

— Осталась непройденной всего *одна* стена за́мка! — огорчился Валет. — Еще чуть-чуть, и я бы выиграл!

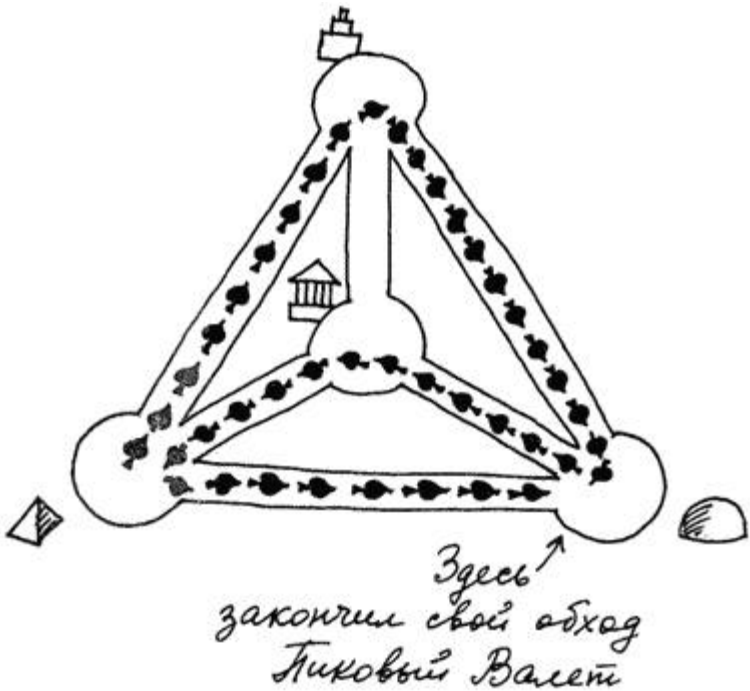
— «Чуть-чуть» не считается, — холодно произнесла Королева. — Ты проиграл, а в справедливой игре проигрыш *такой же*, как выигрыш!

И стражники с алебардами увели несчастного Валета.

— Кажется, игра становится *слишком* серьёзной, — подумала Алиса. — Вот вырасту сейчас и сдую их всех — ведь это всего-навсего колода карт!

Она уже собралась расти, но в этот момент её руки коснулся Король Червей.

— Валета ты этим не спасёшь, — тихо сказал он.



— Почему? — вздрогнула от неожиданности Алиса.

— Если ты дунешь, мы разлетимся, и *все* карты перестанут быть *живыми*, — объяснил Король.

— Так как же тогда спасти Валета? — спросила Алиса.

— Ты должна догадаться сама, — ответил Король. — Кто хочет идти следующим? — обратился он к гостям.

Желающих почему-то не оказалось.

— Неужели никто не хочет выиграть собственную голову? —

удивилась Королева. — Раз уж мы начали с одного Валета, пусть сыграют все Валеты! — И она показала на Бубнового Валета.

Бубновый Валет начал с «вавилонской башни» и прежде всего прошёл ту стену, которая осталась непройденной Пиковым Валетом — от «вавилонской башни» к «греческому храму».

Проходя мимо Короля и Королевы Червей, Бубновый Валет поклонился. Королева не ответила ему, а Король кивнул и проследил за ним взглядом: Валет направился в сторону «египетской пирамиды».

— Как ты думаешь, он ещё *вернётся* сюда? — неожиданно спросил Король Алису.

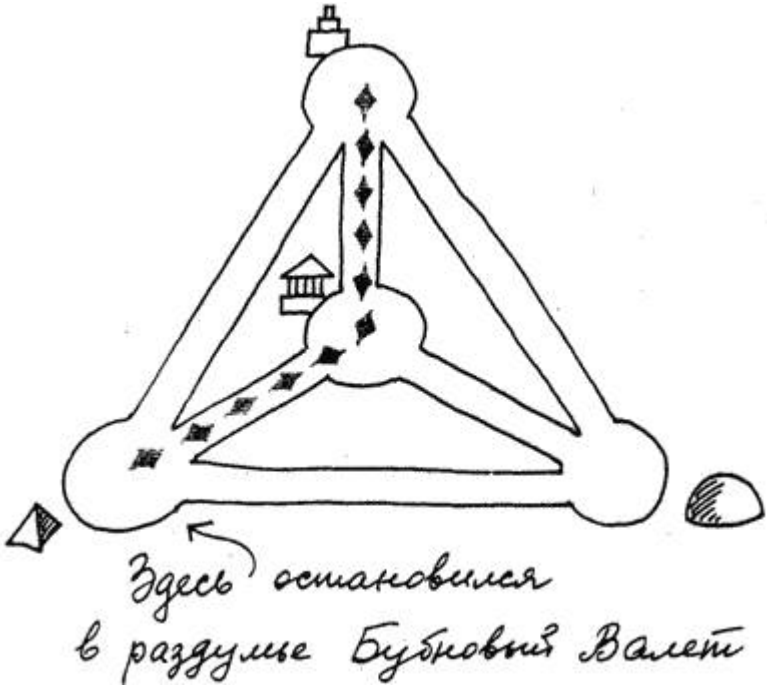
— Не знаю, — сказала она. — Но почему вы об этом спрашиваете?

Король не ответил, и Алиса стала размышлять над его вопросом.

— Валет прошёл *две* стены, идущие от «греческого храма», — думала она, — по одной стене он *пришёл* и по другой *ушёл*. Но от «греческого храма» отходят три стены — значит, чтобы пройти и третью стену, Валет обязательно должен сюда вернуться!

— Он вернётся сюда! — воскликнула Алиса, обращаясь к Королю. — Если, конечно, ему удастся обойти *все* стены, — добавила она. — Но тогда, — родилась у неё новая мысль, — Валету придётся здесь и *закончить* обход — ведь все три стены, идущие от «греческого храма» будут им уже пройдены!

— В том-то и дело, — загадочно отозвался Король и стал снова следить за Бубновым Валетом — он как раз дошёл до «египетской пирамиды» и остановился в раздумье.



— Куда же он сейчас повернёт? — подумала Алиса, и вдруг её осенило.

— Он уже *не сможет* выиграть! — воскликнула она,

— Почему ты так решила? — удивилась Королева. — Ведь он только начал обход!

— *Куда бы* он сейчас ни пошёл, *две* стены, которые отходят от «египетской пирамиды», будут пройдены, — сказала Алиса. — А чтобы пройти *третью* стену, Валету придётся *вернуться* в «египетскую пирамиду» и *закончить* в ней обход!

— Ну и что? — спросила Королева. — Почему бы ему не закончить обход в «египетской пирамиде»?

— Но ведь с «греческим храмом» уже получилось *то же самое*, — ответила Алиса, — здесь тоже пройдены *две* стены из *трёх*. И поэтому получается, что Валет должен закончить обход и в «греческом храме», и в «египетской пирамиде» — но ведь не может же он закончить обход *сразу в двух* башнях за́мка!

— Это не под силу даже Королю, — согласилась Королева, и стражники увели Бубнового Валета.

В третий раз выбор Королевы пал на Валета Червей.

— А если *и он* не сможет пройти? — с тревогой за своего нового знакомого подумала Алиса. — Чтобы его спасти, я должна до чего-то *догадаться*, — вспомнила она слова Короля. — Только вот до *чего*?

Валет Червей начал обход с «греческого храма» и направился в сторону «индийского храма». Алиса посмотрела вслед Валету,

окинула взглядом весь за́мок и... догадалась!

— Обойти этот за́мок так, как предложил Король, вообще *невозможно*! — воскликнула она.

— Ну, это уж слишком! — возмутилась Королева. — Валет не прошел и *одной* стены, а ты уже заявляешь, что обойти весь за́мок вообще невозможно! Откуда ты это знаешь?

— В *каждой* башне за́мка сходятся *три* стены, — сказала Алиса. — А это значит, что каждая из четырёх башен может быть только либо *началом*, либо *концом* обхода!

— Почему? — не поняла Королева.

— Потому что в *середине* обхода могут быть только башни, в которых сходится *чётное* число стен, — объяснила Алиса. — Ведь при каждом «заходе» в такую башню надо пройти *две* стены: по одной стене *прийти* в башню, а по второй — *уйти* из башни! Поэтому *ни одна* из четырёх башен вашего нового за́мка не *может быть в середине обхода*, и, значит, обойти весь за́мок так, как предложил Король, невозможно! — закончила свое рассуждение Алиса.

Королева, нахмурив лоб, задумалась. Все гости стояли молча и смотрели на нее. Наконец, Королева заговорила.

— Зачем вы придумали такую игру, в которую невозможно выиграть? — с упрёком обратилась она к Королю.

— Почему невозможно? — возразил Король. — Как раз *вы-то* всё время выигрываете! Вы же *любите* выигрывать? Теперь вы даже *заранее* знаете, что выиграете — вы говорили, что тогда вам играть интереснее всего?

— Но теперь и *они* все знают, что не смогут выиграть! — воскликнула Королева, показывая на гостей.

— Тем лучше, — отозвался Король. — Значит, теперь вы можете выигрывать, даже *не играя* — разве это не самое интересное?

Гости по-прежнему не сводили глаз с Королевы. Она медленно обвела гостей взглядом и обратилась к Алисе:

— Наверное, ты была права: выигрывать без игры не так интересно... Игра отменяется! — громко объявила она.

Валет Червей благодарно посмотрел на Алису, и она ответила ему кивком.

— Раз игра отменяется, надо помиловать и двух приговорённых Валетов, — сказала Алиса, обращаясь к Королеве.

— Конечно, — поддержал Король Алису. — Если отменяется игра, то отменяются и все проигрыши!

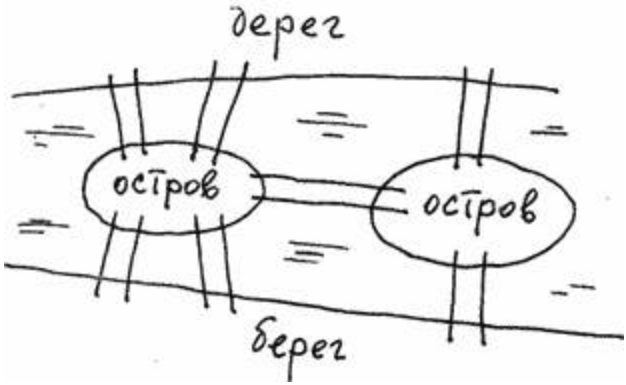
Гости с облегчением вздохнули, но тут Королева сказала:

— Переходим к суду.

НАУКА, РОДИВШАЯСЯ ИЗ ГОЛОВОЛОМКИ

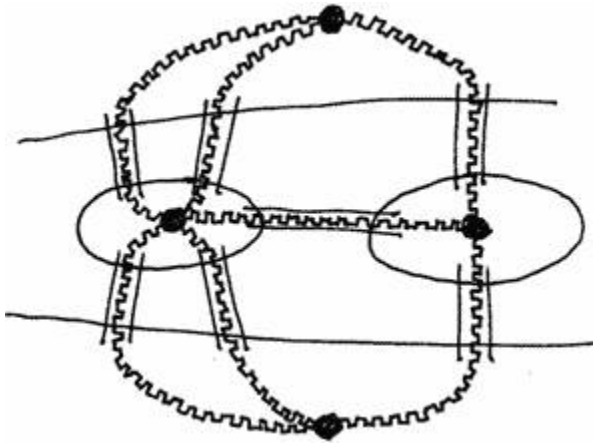
В начале восемнадцатого века жители Кёнигсберга, гуляя по своему старинному городу, обсуждали друг с другом важный вопрос: как обойти семь городских мостов, пройдя по каждому из них только *один раз*?

Вот как были расположены кёнигсбергские мосты:



Может быть, вам удастся их «обойти»? Попробуйте. Но если вам не повезет, не огорчайтесь: ни один житель Кёнигсберга так и не смог этого сделать! А вот если это вам *удалось*, значит... значит, вы просто *ошиблись*! Скорее всего, забыли пройти по какому-то мосту или прошли его дважды. Дело в том, что обойти все кёнигсбергские мосты по одному разу *невозможно*! Сейчас мы докажем это.

Давайте «построим» на обоих берегах реки и на двух островах четыре башни и соединим их стенами так, чтобы по *каждому* мосту прошла *одна* стена. Вот как будет выглядеть наш за́мок из четырех башен, соединенных семью стенами (стены мы изобразили так, как на географических картах изображают Великую Китайскую стену):



Если можно обойти все семь мостов, пройдя по каждому из них только один раз, то и наш новый за́мок тоже можно обойти, проходя один раз каждую из семи стен. Однако посмотрите — ни одна из четырёх башен не может быть *в середине* обхода, потому что в любой башне нашего «кёнигсбергского за́мка» сходится *нечётное* число стен! И поэтому обойти его, проходя один раз по каждой стене, *невозможно* (так же, как и новый королевский за́мок Королевы Червей). Обойти за́мок можно только в том случае, когда башен с нечётным числом стен *не больше двух* — тогда одна из «нечётных» башен должна быть началом обхода, а вторая — его концом. (Если все башни «чётные», то начать обход можно из любой башни. Тогда в этой же башне обход и закончится.)

Задачу о кёнигсбергских мостах первым решил Эйлер в 1736 году. Эйлер был великим математиком и поэтому не ограничился только кёнигсбергскими мостами — он решил задачу *в общем виде*, то есть для любого числа мостов, которые как угодно соединяют берега и любое число островов! И теперь даже житель Санкт-Петербурга может определить, удастся ли ему прогуляться по трёмстам мостам своего города, соединяющим сорок два острова, причём прогуляться так, чтобы пройти по каждому мосту только один раз.

Мы не случайно вспомнили о Санкт-Петербурге: в этом городе Эйлер провёл большую часть жизни, здесь же написал он и свою знаменитую работу о кёнигсбергских мостах. Работы Эйлера рождали порой новые области математики. Так произошло и с работой о кёнигсбергских мостах: с неё берёт начало *топология* — раздел математики, в котором изучаются самые общие свойства геометрических тел и фигур.

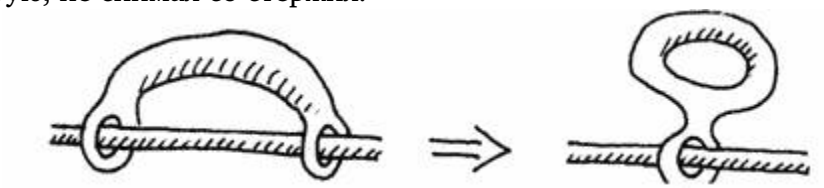
Что это за свойства? Представим себе, что у нас в руках кусок пластилина, и нам разрешается делать с ним, что угодно, но только *не разрывать и не слеплять*.

Пусть, например, кусок пластилина имеет сначала форму стакана. Мы можем превратить «стакан» в «ложку», нигде не разрывая и не слепляя пластилин:

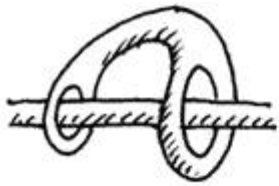
А вот превратить пластилиновый стакан в чашку с ручкой не удастся: ведь для ручки надо сделать дырку, то есть *разорвать* пластилин в каком-то месте, а мы условились, что разрывать и слеплять нельзя! Зато пластилиновую чашку можно превратить в бублик:

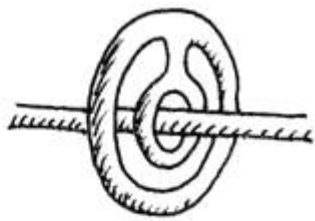
С точки зрения топологии стакан и ложка — это одно и то же, а чашка или бублик — совсем другое (однако чашка и бублик — тоже одно и то же!).

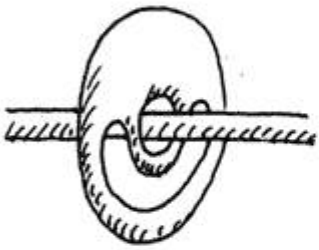
Далеко не всегда очевидно, что две фигуры «топологически одинаковы» — например, трудно поверить, что одну из этих пластилиновых «ручек» можно без разрывов и склеек превратить в другую, не снимая со стержня:

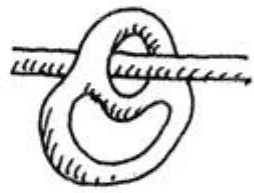


Однако вот промежуточные стадии такого превращения:









Задачи о кёнигсбергских мостах и о новом королевском за́мке — это настоящие топологические задачи: действительно, можно как угодно размещать башни и соединять их стенами любой формы, но пока мы не «разрываем» стен и не «склеиваем» их, задача остаётся той же самой!

Некоторые фигуры имеют настолько необычные топологические свойства, что перестаёшь верить собственным глазам. Одну из таких фигур обнаружил в середине XIX века немецкий учёный Мёбиус. Вы легко можете сами сделать *«лист Мёбиуса»* — возьмите полоску бумаги и склейте её в кольцо, повернув перед склеиванием на пол-оборота:

Чтобы убедиться в необычных свойствах листа Мёбиуса, попробуйте для начала покрасить его с *одной* стороны. Вы обнаружите, что карандаш или кисточка окрасят лист *полностью*! Но так и должно быть — дело в том, что у листа Мёбиуса, в отличие от «обычных» поверхностей (то есть таких, к которым мы привыкли), не *две* стороны, а только *одна*!

А теперь попробуйте угадать, что получится, если разрезать лист Мёбиуса вдоль кольца посередине. Распадется ли он, например, на *два* кольца? Берите ножницы и режьте! Интересно, поверите ли вы своим глазам?

НЕБЫЛИЦА ОБ ЭЙЛЕРЕ, КОТОРЫЙ РАЗГАДАЛ ЗАГАДКУ КЁНИГСБЕРГСКИХ МОСТОВ, ГУЛЯЯ ПО ПЕТЕРБУРГСКИМ

Когда скучно и грустно
И не хочется спать,
По мостам петербургским
Ходит Эйлер гулять.

Он обходит неспешно
Много длинных мостов,
Сладкой спелой черешней
Кормит каменных львов.

Львы его в благодарность
Нежно в ухо лизнут
И за Эйлером следом
По мостам побредут.

Каждый мост он проходит
Лишь один раз всего,
И мосты не разводят,
Ожидая его.

КОРОЛЕВСКАЯ ЛОГИКА

— А где же зал суда? — спросила Алиса: она читала в книжках, что суд происходит всегда в «зале суда».

— Залом будет этот двор, — показала Королева на один из трёх дворов за́мка.

Гости стали садиться прямо на траву, а для Короля и Королевы вынесли трон. Возле трона сразу же столпились какие-то карты и зверушки.

— Это, наверное, *приближённые к трону*, — догадалась Алиса (она не раз слышала о «приближённых к трону», но только теперь увидела, кто это такие!).

Сев на траву, Алиса обнаружила, что рядом с ней сидит Грифон.

— А где же Черепаха Будто? — спросила Алиса.

— Ползёт потихоньку прямо на бал, — ответил Грифон.

В этот момент Белый Кролик (он тоже оказался среди «приближённых к трону») поднял трубу и трижды протрубил.

Все замолчали, и в наступившей тишине Король Червей приказал Кролику:

— Читай обвинение!

Кролик развернул большой свиток пергамента и прочитал:

— Обвиняется Шляпник.

— А где обвиняемый? — поинтересовался Король.

— Его почему-то нет, — робко ответил Белый Кролик.

— Я есть! — раздался откуда-то голос Шляпника. Алиса обернулась и увидела, что Шляпник протискивается к трону между сидящими на траве.

— Почему ты опоздал? — строго спросил Король.

— Мартовский Заяц пригласил нас с Соней на чай... — начал Шляпник.

— Как! — вскричала Королева. — Из-за какого-то чая ты посмел опоздать на суд?

— Дело не в чае, а в часах, — сказал Шляпник. — Когда я пошёл к Мартовскому Зайцу, я забыл свои часы дома...

— Но разве у Зайца нет часов? — удивилась Королева.

— Часы у него, конечно, есть, — ответил Шляпник. — Но они остановились.

— Ну и что? — спокойно спросил Король. — Я уверен, что стоящие часы показывают точное время намного чаще, чем твои!

— И вовсе нет! — обиделся Шляпник. — С тех пор, как Заяц перестал смазывать мои часы сливочным маслом, они стали *идти* очень точно!

— *Как* точно? — поинтересовался Король.

— Они отстают всего на одну секунду в сутки, — похвастал Шляпник.

— На одну секунду в сутки? — переспросил Король. — Значит, за месяц они отстанут на полминуты?

— Всего-навсего! — радостно подтвердил Шляпник. — Я их не подвожу уже два месяца, и за это время часы отстали только на одну минуту!

— В часе шестьдесят минут, — сказал Король. — Значит, твои часы отстанут на час за сто двадцать месяцев...

— Это целых десять лет! — воскликнул Шляпник.

— А за сто двадцать лет твои часы отстанут на двенадцать часов, — продолжал Король.

— До этого, наверное, я уже не доживу, — вздохнул Шляпник.

— Зато тот, кто доживёт, наконец-то увидит на твоих часах *точное* время! — заметил Король.

— Почему? — удивился Шляпник.

— Только тогда, когда твои часы отстанут на двенадцать часов, их стрелки снова покажут точное время, — объяснил Король. — Разве не так?

— Так, — подтвердил озадаченный Шляпник.

— Вот и получается, что твои часы показывают точное время только *один раз в сто двадцать лет*! — воскликнул Король. — А часы, которые стоят, показывают точное время *два раза в сутки* — это примерно в восемьдесят семь тысяч шестьсот раз чаще, чем твои! Так что, как видишь, твои отстающие часы намного хуже, чем часы Зайца, которые вообще стоят!

— Но как же узнать, *когда* стоящие часы показывают точное время? — растерянно спросил Шляпник.

— Очень просто, — сказал Король. — Который час показывали часы Мартовского Зайца?

— Шесть часов, — ответил Шляпник.

— Значит, ровно в шесть часов утра и в шесть часов вечера эти часы показывают точное время, — отозвался Король.

— Но откуда я узнаю, что наступило шесть часов? — не сдавался Шляпник.

— Как только часы у Зайца покажут точное время, так шесть часов и наступают! — торжественно произнёс Король, подняв палец. — Надо только внимательно следить за часами!

На этот раз бедный Шляпник не знал, что возразить — он только переступал с ноги на ногу, но слов не находил.

— Как видишь, твоему опозданию нет никакого оправдания, — заявила Королева. — Уже за одно это тебе стоило

бы отрубить голову!

— Послушаем всё-таки, в чём он обвиняется, — предложил Король. — Читай обвинение! — снова приказал он Кролику.

— Шляпник нарушил закон, — прочитал Кролик, глядя в свиток.

— Какой закон? — спросил Король.

— Ну, это уж совсем не имеет значения! — возразила Королева. — Раз он нарушил закон, значит, надо отрубить ему голову.

— И всё-таки я хотел бы знать, *какой* закон он нарушил, — настаивал Король.

— Шляпник нарушил закон о Шляпнике, — прочитал Белый Кролик.

— *А что это за закон*? — поинтересовался Король.

— *Шляпник должен шить шляпы всем тем и только тем, кто не шьёт себе шляпу сам*, — торжественно прочитал Кролик.

— Но ведь я же выполнял этот закон! — воскликнул Шляпник. — Смотрите! — показал он в «зал суда». — Все ходят в шляпах, сшитых мною...

— Сначала мы будем не смотреть, а *слушать*, — перебила Королева. — Позвать первого свидетеля!

Первым свидетелем оказался Соня («Как он успел сюда добраться?» — удивилась Алиса).

— Я всё проспал и ничего не знаю, — сразу же заявил Соня.

— *Совсем* ничего? — переспросила Королева.

— Совсем, — решительно подтвердил Соня.

— Это ложь, — возразила Королева.

— Почему? — удивился Соня.

— Раз ты *знаешь*, что ничего не знаешь, значит, *что-то* ты всё-таки знаешь! — объяснила Королева. — И за лжесвидетельство тебе полагается отрубить голову. Уведите его! — приказала она стражникам.

Вторым свидетелем был Мартовский Заяц.

— А ты будешь говорить правду? — строго спросила его Королева.

— Нет, — прижав уши, выдавил из себя Заяц.

— Почему? — поразилась Королева безрассудной храбрости Зайца.

— Я очень боюсь, — признался Заяц. — А от страха я всегда обманываю!

— Ладно, обманывай, — неожиданно смягчилась Королева (видно, откровенность Зайца тронула даже её). — Мы будем понимать твои слова наоборот и узнаем, как всё было на самом деле.

— Но если Заяц *действительно* обманывает, то он обманывает и тогда, когда говорит, что обманывает, — возразил Король.

— Значит, он говорит правду? — спросила Королева. — Тем лучше!

— Правду он тоже не говорит, — сказал Король. — Ведь тот, кто говорит правду, никогда не скажет, что он обманывает!

— Но если он не обманывает и не говорит правду, то что же он тогда говорит? — удивилась Королева.

— *Чушь*, — ответил Король. — Он говорит чушь, потому что сам себе *противоречит*.

— Отрубить ему голову! — решительно произнесла Королева, и бедного Зайца тоже увели.

— Свидетелей по этому делу больше нет, — с опаской заметил Белый Кролик.

— Придётся слушать самого обвиняемого, — заключил Король.

— Кто сшил твою шляпу? — спросила Королева у Шляпника.

— Я, конечно, — ответил Шляпник. — Ведь я же Шляпник!

— Вот ты и нарушил закон! — радостно заявила Королева.

— Почему? — удивился Шляпник.

— Согласно закону ты должен шить шляпы *только тем, кто не шьет себе шляпу сам*. А ты как раз сшил себе шляпу *сам*!

Шляпник открыл рот, но не нашёл, что возразить.

— Но если бы Шляпник *не* сшил себе шляпу, он тоже нарушил бы ваш закон, — вмешался Король. — Ведь в таком случае он стал бы одним из тех, кто *не шьёт себе шляпу сам*, а согласно закону Шляпник обязан шить шляпы *всем, кто не шьёт их себе сам*. И поэтому он *должен* был бы сшить шляпу и себе самому!

Королева растерялась, а Шляпник, наоборот, воспрянул духом.

— Что же тогда Шляпник должен делать, чтобы не нарушить закон? — спросила Королева, пытаясь справиться с растерянностью.

— Этот закон выполнить вообще невозможно, — ответил Король.

— Раз это *королевский* закон, он должен быть выполнен! — потребовала Королева.

— Но этот закон *противоречит сам себе*, — возразил Король. — А перед противоречиями бессильны даже короли...

Он развёл руками и почему-то подмигнул Алисе.

— Если мой закон противоречит сам себе, значит, этот закон — чушь?! — спросила Королева, вскипая гневом.

— Давайте лучше перейдём к следующему делу, — предложил Король. — Что там ещё? — повернулся он к Белому Кролику.

— Обвиняется Шляпник! — громко прочитал Кролик. — Он нарушил закон...

— Это уже было, — остановил его Король. — Читай дальше.

— Шляпник нарушил ещё один закон, — пояснил Белый Кролик.

— Ого! — воскликнул Король и посмотрел на Шляпника с интересом. — Никогда бы не подумал, что ты такой нарушитель законов! Какой же закон он ещё нарушил? — спросил он у Белого Кролика.

— *Согласно закону Шляпник должен шить только шляпы*! — прочитал Кролик.

— Надеюсь, в этом законе нет противоречий? — язвительно спросила Королева.

— Пока я их не вижу, — осторожно ответил Король. — А свидетели по делу есть?

— Ха-Ха и Ах-Ах! — громко крикнул Кролик.

— Уж не сошёл ли ты с ума? — поинтересовался Король.

— Так зовут свидетелей, — объяснил Кролик и показал на братьев, которые в обнимку подходили к трону.

— Когда же они пришли? — удивилась про себя Алиса. — Или их тоже *привели*?

— Вы будете говорить правду? — строго спросила братьев Королева.

— Мы оба всегда лжём! — решительно ответил один из братьев.

— Опять чушь! — схватилась за голову Королева.

— Почему же? — возразил Король. — Он, конечно, не говорит правду, но лгать вполне может!

— Но ведь если он лжёт, когда говорит, что лжёт, значит, он не лжёт! — воскликнула Королева.

— Он сказал, что они *оба* лгут, — уточнил Король. — И если второй говорит правду, значит, первый действительно лжёт!

— Вот и будем спрашивать только *второго*, — предложила Королева. — Но только какой из них первый, а какой — второй? Вы не помните, кто из них ответил: «Мы оба лжём»?

— Нет, — сказал Король. — Они так похожи!

— Не так уж они похожи, — подумала Алиса, но решила промолчать: ей было интересно, как Король и Королева выйдут из затруднения.

— Ты говоришь правду? — спросила Королева одного из братьев.

— Конечно! — сразу же ответил тот.

— А теперь спросите другого, — предложил Король. Королева спросила, и другой брат ответил «да».

— Как же так? — удивилась Королева. — Ведь один из них должен лгать!

— Он и лжёт, — отозвался Король. — Как раз поэтому тот, кто лжёт, и сказал, что говорит правду!

— Так как же, наконец, узнать, кто из них лжёт? — рассердилась Королева. — Ты лжёшь? — в упор спросила она одного из братьев.

— Никогда! — возмутился тот.

— А ты? — обратилась она ко второму.

— Ни за что! — так же искренне возмутился другой.

— Но ведь они так и должны отвечать, — улыбнулся Король, видя растерянность Королевы. — Тот, кто говорит правду, действительно не лжёт, а тот, кто лжёт, ни за что не признается, что он лжёт!

— Но если они на все вопросы дают *одинаковые* ответы, мы так и не узнаем, кто из них лжёт, а кто говорит правду, — рассудила Королева.

— Я думаю, они будут давать одинаковые ответы не на *все* вопросы, — сказал Король и спросил одного из братьев:

— У тебя есть брат?

— Нет, — ответил тот.

— А у тебя? — спросил он другого.

— Да, — ответил другой.

— Вот и всё, — сказал Король. — Теперь мы знаем, кто из них говорит правду, а кто лжёт: ведь мы-то видим, что они *братья*!

— У них на свитерах написаны имена, — заметила Королева. — Того, кто сказал правду, зовут Ха-Ха. Его и будем спрашивать.

— Можно спрашивать и Ах-Аха, — сказал Король. — Только слова его надо понимать наоборот!

— Перейдем к делу, — решительно произнесла Королева. — Башмаки вам сшил Шляпник? — спросила она у Ха-Ха.

— Нет, — ответил Ха-Ха.

— Помни, — предупредила его Королева, — ты говоришь правду!

— Я и говорю правду, — сказал Ха-Ха.

— Проверим на другом, — подумав, предложила Королева. — Шляпник сшил вам башмаки? — спросила она у Ах-Аха.

— Да, — ответил Ах-Ах.

— Значит, *нет*, — уточнил Король. — Получается, что их показания *совпадают*!

Королева, нахмурив брови, посмотрела на Белого Кролика. От взгляда Королевы Кролик задрожал и зашептал что-то ей на ухо, показывая на ноги братьев.

— Так это Белый Кролик рассказал Королеве о башмаках-шляпах! — возмущенно сказала Алиса, повернувшись к Грифону. — Ах, если бы я знала, что Кролик — ябеда, когда мы с ним переправлялись в лодке через озеро...

— То *что* бы ты сделала? — с интересом спросил Грифон, но Алиса не успела ответить, потому что в этот момент Королева спросила Ха-Ха:

— Кто сшил то, что надето у тебя на ногах?

— Шляпник, — ответил Ха-Ха.

— Почему же ты сказал, что Шляпник не шил вам башмаки? — рассердилась Королева.

— Это не башмаки, — пояснил Ха-Ха. — Это шляпы для ног. Смотрите — они даже с бантами!

— *Шляпы для ног*? — поразилась Королева. — Но разве для ног шьют шляпы?

— А почему бы и нет? — вмешался в разговор Шляпник. — Разве есть королевский закон, запрещающий шить шляпы для ног?

— Неужели вы не догадались издать такой важный закон? — упрекнул Король Королеву.

— Но зачем? — возмутилась Королева. — Всякому ясно, что шляпы шьют для голов, а не для ног!

— Я не *всякий*, — возразил Шляпник. — Я — *Шляпник*!

— Тогда тебе это тем более должно быть ясно! — сердито заметила Королева.

— Ничего подобного, — отозвался Шляпник. — Мне надо только снять мерку, и я смогу сшить шляпу для чего угодно!

— Ваш закон придётся дополнить, — обратился Король к Королеве. — Надо написать, что шляпа — это то, что надевают на голову.

— Тогда надо ещё записать, что такое *голова*, — добавил Шляпник.

— Голова — это то, чего ты сейчас лишишься! — вскипела Королева.

— Вы так и хотите записать? — удивился Шляпник. — Но тогда получится, что шляпа — это то, что надевают на то, чего лишился Шляпник!

— Это не очень хорошо, — согласился Король.

— Как же тогда записать, что такое голова? — задумалась Королева и подняла глаза вверх.

В это время Король сделал знак Шляпнику, и тот сразу куда-

то исчез. Осмотревшись, Алиса обнаружила, что Соня, Мартовский Заяц и братья Ха-Ха и Ах-Ах тоже исчезли. Она переглянулась с Грифоном, и они сразу поняли друг друга.

— Какая Королева жестокая! — возмущенно сказала Алиса, когда они с Грифоном выбрались из замка. — Только и делает, что приказывает рубить головы!

— Никому до сих пор не отрубили, — отозвался Грифон. — Все приговоры Король отменяет, или Королева просто забывает о них.

— Почему же тогда Королеву так боятся? — спросила Алиса.

— Ты же сама видела — она полна противоречий! — ответил Грифон. — А вдруг она не забудет о каком-нибудь приговоре?

— С лжецом и то лучше иметь дело, — сказала Алиса.

— Конечно, — согласился Грифон. — Надо только понимать всё, что он говорит, наоборот! А с тем, кто противоречит сам себе, никогда не связывайся!

— А как же Мартовский Заяц? — вспомнила Алиса. — Разве он не противоречил сам себе, когда говорил на суде, что всегда обманывает?

— Да он просто дурачком прикидывался! — рассмеялся Грифон. — Шляпника выдавать не хотел.

— А Белый Кролик, наоборот, доносчик! — сердито сказала Алиса.

— У него работа такая, — вздохнул Грифон.

— Доносить? — поразилась Алиса.

— Белый Кролик обязан следить за выполнением королевских законов, — объяснил Грифон. — Даже тех, выполнить которые невозможно...

— Я бы ни за что не согласилась на такую работу! — сказала Алиса.

— Я тоже, — отозвался Грифон. — Ну, до встречи на балу! — крикнул он и пустился скачками вдоль берега озера.

— А мне куда идти? — вдогонку ему крикнула Алиса.

— За мной! — обернувшись, ответил Грифон и умчался.

КАК ЧЕЛОВЕК УЧИЛСЯ РАССУЖДАТЬ

Человек начал думать с тех пор, как он стал человеком (по-латыни он так и называется — homo sapiens, то есть «человек разумный»). Однако десятки тысяч лет человек думал, совершенно не задумываясь о том, *как* он думает. И делал из-за этого много ошибок.

Первыми задались вопросом «что такое рассуждение?» древние греки. Они сделали величайшее открытие: рассуждение — это способ получения новых знаний.

Помните прославленный «дедуктивный метод» Шерлока Холмса?

— Я могу распутать преступление, даже не выходя из своей комнаты, — говаривал знаменитый сыщик удивлённому доктору Ватсону и погружался в глубокое раздумье.

Это раздумье и есть способ получения новых знаний! Такие знания называются «умозаключения», то есть заключения (выводы), полученные с помощью ума (рассуждения)

Получать новые знания с помощью рассуждений можно не только распутывая преступления — мы занимаемся этим, решая любую задачу, когда ответ её нам неизвестен: ведь этот ответ и есть новое для нас знание!

Бóльшая часть знаний, которыми обладает человечество, получены с помощью умозаключений — ведь и то, что люди узнали опытным путем, они тоже должны были осмыслить

Но откуда берётся уверенность, что рассуждение правильно? Всегда ли можно доверять новому знанию, полученному посредством умозаключений?

Размышляя над этими вопросами, древнегреческий учёный Аристотель открыл *законы мышления* — правила, пользуясь которыми можно делать правильные умозаключения. Наука о законах мышления называется *логикой* от греческого слова «логос», что означает «мысль». Логикой Аристотеля мы пользуемся до сих пор.

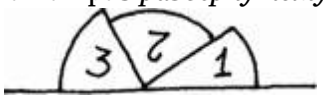
Науку о мышлении Аристотель создавал не на пустом месте — у него были великие предшественники. С некоторыми из них мы уже знакомы. Так, Фалес, первый математик в истории, высказал идею *доказательства*, а доказательство — это как раз и есть установление правильности рассуждения. Строгих доказательств от своих учеников требовал и учитель Аристотеля Платон, который, в свою очередь, был учеником Сократа. Сократ учил рассуждать не только в математике, но и в жизни, причем учил очень интересным методом: он задавал вопросы, которые будили мысль у его собеседника — этот замечательный метод так и называется «сократовским». Сам Сократ был настолько мудр, что учился у каждого, кто мог сообщить ему что-то для него новое.

Особенность математики состоит в том, что правильность

новых знаний можно установить *только* с помощью рассуждений — их невозможно проверить на опыте!

Объясним это на примере. Возьмём линейку, начертим на бумаге несколько разных треугольников и вырежем их. А затем обрежем у них углы — вот так:

Приложим теперь эти углы друг к другу. Мы обнаружим, что у всех наших треугольников сумма углов одна и та же — она равна как раз *развёрнутому* углу:



Мы получили новое знание: «у *некоторых* треугольников сумма углов равна развернутому углу». Это знание получено *опытным* путём. Но поскольку мы брали *разные* треугольники, у нас возникает догадка: может быть, у *всех* треугольников сумма углов равна развёрнутому углу?

Мы испытываем нашу догадку на десяти, ста, тысяче треугольниках и с радостью обнаруживаем, что она подтверждается! Однако можно ли считать, что мы её *доказали*? Нет, нельзя — ведь в нашей догадке речь идёт о *всех* треугольниках, а их *бесконечно много*! Там же, где появляется бесконечность, опыт бессилен (это слова французского математика Пуанкаре).

Поэтому здесь требуется *математическое* доказательство: можно доказать, что сумма углов у всех треугольников равна развёрнутому углу, *если*... Вот это «если» и есть самое главное!

На что должно опираться математическое доказательство? Прежде всего, конечно, на *уже доказанные* утверждения (как мы помним, они называются *«теоремами»)*. Но, оказывается, при этом возникает новая бесконечность, очень похожая на бесконечную цепочку вопросов *«почему?»* в беседе с четырёхлетним homo sapiens: вы отвечаете малышу на первый вопрос, но ваш ответ сразу же рождает у него второе «почему?», и ... новый ответ будет рождать новый вопрос без конца!

Учёные по своей любознательности почти не уступают четырёхлетним малышам, и поэтому они тоже столкнулись с бесконечной цепочкой вопросов и ответов — было это ещё в Древней Греции. И тогда стало ясно, что для того, чтобы можно было что-то доказать, какие-то утверждения придётся принять *без доказательств*, например: «через две точки проходит одна и только одна прямая». Такие утверждения греки назвали *аксиомами*, что в переводе с греческого означает «достойные почестей».

Главное требование к аксиомам состоит в том, чтобы они *не противоречили* друг другу (иначе получится так, как с «королевскими законами», которые придумывала Королева Червей). Непротиворечивость аксиом далеко не всегда очевидна: даже очень «правдоподобные» аксиомы могут противоречить друг другу! Вот известный шуточный пример. Возьмём три «аксиомы»:

1. Чем больше учишь, тем больше знаешь.

2. Чем больше знаешь, тем больше забываешь.

3. Чем больше забываешь, тем меньше знаешь.

Каждая из этих «аксиом» *по отдельности* не вызывает сомнений. Однако из трёх «аксиом» *вместе* следует вывод: «Чем больше учишь, тем меньше знаешь»! С этим странным выводом можно было бы и согласиться, но он противоречит первой «аксиоме»! А из второй и третьей «аксиом» следует вывод, который вообще противоречит сам себе: «Чем больше знаешь, тем меньше знаешь»! Так что волей-неволей приходится признать, что эти правдоподобные «аксиомы» противоречат друг другу.

Но даже непротиворечивых аксиом для доказательств теорем недостаточно. Надо ещё, чтобы тот, кто доказывает, и тот, кто его слушает, правильно понимали друг друга — ведь недоразумение может возникнуть просто из-за того, что они по-разному понимают значение одного и того же слова (помните спор Шляпника с Королевой о том, что такое «шляпа»?). Чтобы таких недоразумений не возникало, математики пользуются *определениями*. Если теорема отвечает на вопрос «почему?», то определение отвечает на вопрос «что такое?». Например:

— Что такое квадрат?

— Это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Однако тут сразу же возникает новый вопрос:

— А что такое прямоугольник?

И уже можно догадаться, что нас снова подстерегает бесконечность, только на этот раз не вопросов «почему?», а вопросов *«что такое?»*. Поэтому некоторые понятия математикам пришлось принять за *основные*, то есть отказаться от попыток определить их. Например, основными понятиями являются «точка» и «прямая».

Когда есть основные понятия, аксиомы и правила логики, можно, наконец, доказывать теоремы! Теоремы — это и есть новые знания математиков: доказательством теорем математики занимаются со времён Фалеса до наших дней.

Через две тысячи лет после Аристотеля немецкий учёный Лейбниц задался целью создать универсальный язык науки, с помощью которого можно было бы записывать любые рассуждения в виде математических формул.

И тогда, надеялся Лейбниц, учёные перестанут, наконец, спорить до хрипоты — вместо этого они возьмут в руки карандаши и спокойно скажут друг другу: «Давайте *вычислим* истину». Лейбниц даже думал о машине, которая сама сможет доказывать теоремы!

Однако только через сто пятьдесят лет после того, как Лейбниц высказал свою идею, ирландский математик Буль создал тот язык, о котором мечтал Лейбниц. Буль построил «алгебру логики», в которой есть уравнения, похожие на уравнения «обычной» алгебры, только при решении *логического* уравнения ищется ответ не на вопрос «сколько?», а на вопрос *«истинно или ложно?»*. И сегодня, пользуясь «алгеброй логики» (чаще её называют «булевой алгеброй»), электронно-вычислительные машины действительно начали доказывать теоремы! Правда, пока ещё с помощью математиков...

Уже в самом начале развития логики выяснилось, что кроме истины и лжи бывает еще и «чушь» — высказывания, которые вообще *лишены смысла* (например, потому, что они противоречат самим себе). Но иногда противоречие запрятано так глубоко, что его ищут многие годы. Одним из первые таких примеров был знаменитый «парадокс лжеца»: если кто-то говорит «я лгу», то его слова лишены смысла (помните «показания» Мартовского

Зайца?). Очень интересный парадокс был предложен английским учёным Расселом в начале XX века: должен ли брить самого себя цирюльник, которому приказано брить тех и только тех, кто не бреется сам? (Помните похожий королевский закон о Шляпнике?).

Парадоксы всегда привлекали учёных, потому что разбор парадоксов позволяет лучше понять законы мышления и учит избегать ошибок. А кроме того, парадоксы неожиданны и интересны, и этого уже достаточно для того, чтобы с ними стоило познакомиться!

Кстати, «парадокс стоящих часов», которые показывают точное время чаще, чем идущие, принадлежит самому Льюису Кэрроллу, а точнее — Чарльзу Лютвиджу Доджсону, который занимался как раз математической логикой.

НЕБЫЛИЦА О ТОМ, КАК ЛЕЙБНИЦ И БУЛЬ ИЗОБРЕЛИ ЯЗЫК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Однажды заспорили Лейбниц и Буль —
Был жарким тот спор небывало!
К тому же учтите: был знойный июль,
И солнце в зените стояло.

Обоих манила прохладой вода,
Но спор всё сильней разгорался.
И Лейбница вдруг осенило тогда —
Он вот до чего догадался:

— Слова надо *знаками* нам заменять —
Ведь мы математики оба.
Мы истину сможем тогда *вычислять*!
А Буль отвечал: — Хорошо бы!

Пришлось им придумать особый язык,
Для поиска истин удобный —
Они превратили песок в черновик,
И все записали подробно.

Им истина сразу же стала видна,
Лишь только на запись взглянули!
Буль первым нырнул. Уж светила луна.
А Лейбниц нырнул вслед за Булем.

СЛИШКОМ СТРАШНАЯ ИСТОРИЯ

Алиса шла вдоль берега озера и радовалась, что суматоха королевского приёма и бестолковый суд остались позади: ей хотелось побыть одной и отдохнуть от всяких головоломок. Напевая песенку, она побежала вприпрыжку.

— Скорей бы попасть на бал! — крутилось у неё в голове. — Ой, а не разучилась ли я танцевать? Надо проверить... начнём с кадрили!

И Алиса начала выделывать танцевальные фигуры, старательно повторяя те, которые получались не очень хорошо. Так, танцуя, она двигалась вперёд, глядя на свои ноги, и не заметила, что дорога повернула в лес. Лес становился всё гуще, и, наконец, стемнело так, что Алиса с удивлением подняла голову — лучи солнца с трудом пробивались сквозь листву!

— Когда в лесу темнеет, это обычно из-за того, что прилетает дракон, — вспомнила Алиса слова Эдит и на всякий случай внимательно посмотрела по сторонам.

Дракона она не увидела, но зато ей показалось, что *на неё* кто-то смотрит.

— Меня, наверное, приняли за сумасшедшую, — с досадой подумала Алиса. — Разве тот, кто в своём уме, станет танцевать кадриль в лесу?

И тут она заметила, что над грибом, возле которого она стояла, поднялись клубы дыма. Гриб был ростом с Алису (точнее, она была ростом с гриб: ведь она так и осталась маленькой!), и поэтому Алисе не было видно, откуда идёт дым.

— Может, там сидит дракон? — встревожилась она. — Маленький, но огнедышащий!

Алиса поднялась на цыпочки и... глаза её встретились с круглыми глазами дракона, который пустил струю дыма прямо в лицо Алисе! Она в ужасе отпрянула и спряталась за ближайшее дерево.

— Первым делом надо вырасти! — подумала Алиса, и всё вокруг сразу же уменьшилось.

Выглянув из-за дерева, Алиса увидела, что на шляпке гриба сидит Синяя Гусеница и преспокойно курит кальян. Алисе стало стыдно, что она приняла Гусеницу за дракона, и она вышла из-за дерева.

— Ты кто? — спросила Гусеница ленивым голосом.

— Алиса, — ответила Алиса, довольная, что разговор начался.

— Значит, вот они какие — Алисы... — задумчиво произнесла

Гусеница, разглядывая Алису с головы до ног. — Скажи, а все Алисы такие — двуногие, танцующие, пугливые, быстрорастущие и с бантом?

— Алиса — это моё имя, — пояснила Алиса. — Я — девочка, а зовут меня Алисой.

— Ты хочешь сказать, что ты принадлежишь множеству девочек и множеству тех, кого зовут Алисами? — спросила Гусеница.

— Я не уверена, что хотела сказать именно это, — призналась Алиса. — Честно говоря, я даже не знала, что принадлежу каким-то множествам!

— *Все* принадлежат каким-то множествам, — отозвалась Гусеница, пуская новые клубы дыма.

— И вы тоже? — спросила Алиса.

— И я, — подтвердила Гусеница. — Я принадлежу множеству гусениц и множеству тех, кто живёт в этом лесу... Кстати, есть и такие множества, которым мы с тобой принадлежим *вместе*!

— *Мы с вами?* — поразилась Алиса. — Но у нас же нет ничего общего!

— Так уж и ничего? — спросила Гусеница, и Алисе показалось, что та на неё немного обиделась.

— Есть, есть общее! — спохватилась Алиса (ей совсем не хотелось обижать Гусеницу). — У нас обеих есть глаза, мы обе умеем разговаривать, и ещё...

— ... и ещё много чего общего, — согласилась Гусеница, хотя нотки обиды всё ещё сквозили в её голосе.

— Значит, мы с вами вместе принадлежим множеству тех, у кого есть глаза, и множеству тех, кто умеет разговаривать? — спросила Алиса.

— Конечно, — сказала Гусеница. — Но даже если бы у нас с тобой не было совсем ничего общего, всё равно мы принадлежали бы каким-то множествам вместе!

— Каким же? — удивилась Алиса.

— Например, множеству, которое состоит из тебя и меня, — ответила Гусеница.

— Но разве может множество состоять всего из двоих? — спросила Алиса.

— Множество может состоять даже из *одного* элемента, — отозвалась Гусеница. — Например, ты — единственный элемент множества, которое состоит из одной тебя!

— Я не элемент, а девочка! — обиделась на этот раз Алиса.

— Элементами называют то, из чего состоят множества, — пояснила Гусеница. — Ты — элемент множества девочек, и ещё множества тех, кого зовут Алисой, и ещё... — Гусеница

внимательно посмотрела на Алису, — ...множества тех, у кого есть карманы. В это множество, кстати, ты входишь вместе с кенгуру...

— Но я не хочу быть в одном множестве с кенгуру! — перебила Алиса.

— Ты в одном множестве даже с лягушками, — невозмутимо отозвалась Гусеница. — Это, например, множество тех, у кого есть голова...

— Но тогда получается, что я вхожу в *любое* множество, — рассудила Алиса.

— Не в любое, — сказала Гусеница. — Ты не входишь, например, в множество лягушек...

— Вы же сами только что сказали, что я с ними в одном множестве! — перебила Алиса.

— Даже не в *одном*, — попыхивая кальяном, произнесла Гусеница. — Ты вместе с лягушками входишь в много разных множеств. Но в само множество лягушек ты не входишь!

— Почему? — спросила Алиса, совсем сбитая с толку.

— Потому что ты не лягушка, — спокойно ответила Гусеница и снова внимательно посмотрела на Алису.

Бедная Алиса даже не могла придумать, как продолжить этот разговор!

— Ещё ты не входишь в множество тех, кто знает *всё*! — после недолгого молчания глубокомысленно изрекла Гусеница.

— Но разве кто-нибудь знает *всё?* — удивилась Алиса.

— Никто! — коротко ответила Гусеница.

— Значит, множества тех, кто знает всё, просто не существует, — сказала Алиса.

— Оно существует, — возразила Гусеница и, помолчав, добавила: — Но это множество *пустое*.

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— Это значит, что в нём нет ни одного элемента, — ответила Гусеница.

— Зачем же нужно такое множество, в котором ничего нет? — удивилась Алиса.

— Без него нельзя было бы, например, *умножать* одни множества на другие, — спокойно произнесла Гусеница.

— Умножать множества? — воскликнула Алиса. — Но разве это числа?

— Множества не числа, — отозвалась Гусеница. — Поэтому и умножают их иначе. Мы с тобой, кстати, с этого начали!

— Я этого не заметила, — призналась Алиса.

— Ты сказала, что ты девочка, которую зовут Алисой, — напомнила Гусеница. — Так вот: если умножить множество всех

девочек на множество всех Алис, то получится множество всех девочек, которых зовут Алисами...

— Я поняла! — воскликнула Алиса. — А если умножить множество всех кошек на множество всех жителей Оксфорда, то получится множество всех кошек, которые живут в Оксфорде, правильно?

— Мне никогда не приходилось бывать в Оксфорде, и я никогда не видела кошек, — сказала Гусеница, — но всё равно я могу подтвердить, что ты права!

— По одной из этих кошек я уже, кажется, соскучилась, — призналась Алиса.

— А что едят кошки? — поинтересовалась Гусеница.

— Гусениц они не трогают, — успокоила её Алиса. — Но я так и не поняла, зачем для умножения множеств нужно пустое множество?

— Попробуй умножить множество всех тигров на множество всех лягушек, — предложила Гусеница..

— Получится... получится множество всех тигров, которые являются лягушками... Но ведь таких нет! — воскликнула Алиса.

— Это и значит, что множество тигров-лягушек — пустое множество, — с довольным видом сказала Гусеница.

— Пустое множество похоже на нуль, — заметила Алиса. — Ведь нуль — это тоже ничто!

— Похоже, — согласилась Гусеница. — Но всё-таки пустое множество — это не нуль.

— Чем же отличается пустое множество от нуля? — заинтересовалась Алиса.

— Скажи — когда при умножении двух чисел получается нуль? — спросила Гусеница.

— Когда хотя бы одно из этих двух чисел равно нулю! — подумав, ответила Алиса.

— Правильно, — подтвердила Гусеница. — А вот для множеств это не так: можно перемножить два *непустых* множества и получить *пустое* множество!

— Конечно, — тут же согласилась Алиса. — Например, наши тигры-лягушки!

— Множества можно не только умножать, — сказала гусеница. — Их можно ещё *складывать* и *вычитать*.

— А как это делается? — спросила Алиса. — Нет, я лучше попробую сама! Если множество всех девочек сложить с множеством всех мальчиков, то получится множество всех детей, правильно?

— Я никогда не видела мальчиков, — произнесла Гусеница, — и не знаю, что такое дети. Но если дети состоят

только из мальчиков и девочек, то ты права.

— Кажется, я догадываюсь, и как вычитать множества, — сказала Алиса. — Если из множества всех детей вычесть множество всех мальчиков, получится множество всех девочек, правильно?

— Правильно, — подтвердила Гусеница. — А теперь попробуй наоборот: вычти из множества всех девочек множество всех детей — что получится?

— Получится... — задумалась Алиса, — получится пустое множество — ведь нет таких девочек, которые не были бы детьми!

— Как видишь, пустое множество нужно не только для умножения множеств, но и для вычитания, — сказала Гусеница.

— Я вижу, что вычитаются множества тоже не так, как числа, — заметила Алиса. — Для чисел нуль получается только тогда, когда мы вычитаем из числа *такое же* число!

— Складываются множества тоже не так, как числа, — сказала Гусеница. — Если, например, к числу пять прибавить какое-то число, может получиться снова пять?

— Конечно, нет! — ответила Алиса.

— А если мы прибавим *нуль?* — прищурившись, спросила Гусеница и выпустила ровно пять клубов дыма.

— Про нуль я забыла, — призналась Алиса. — Но ведь и с множествами так же: если к любому множеству прибавить пустое множество, получится снова то же самое множество!

— Конечно, — согласилась Гусеница. — А как ты думаешь, что получится, если к множеству всех насекомых прибавить множество всех гусениц?

— Получится... получится снова множество всех насекомых! — воскликнула Алиса. — Ведь все гусеницы — насекомые!

— Но разве множество всех гусениц — пустое? — спросила Гусеница. — Ты же сама видишь, что хотя бы *одна* гусеница существует!

— Я поняла, — сказала Алиса. — К множеству можно прибавить непустое множество, но получить то же самое множество! Значит, множества действительно складываются не так, как числа...

Беседа становилась всё более интересной, но тут Алиса вспомнила, что она может опоздать на бал.

— Извините, — вежливо сказала она, — но я спешу на бал. А вы хотите попасть на бал? Я могу вас пригласить.

— Что мне там делать? — отозвалась Гусеница. — Ведь я не принадлежу множеству тех, кто умеет танцевать!

Сказав это, она сползла с гриба и тут же скрылась в траве.

— Вы так быстро ползаете, что вполне могли бы танцевать медленные танцы! — крикнула Алиса вслед Гусенице, но та не ответила.

Алиса побежала дальше. Постепенно лес начал редеть, и вскоре она выбежала на опушку.

Впереди у самой дороги Алиса увидела маленький домик. Из него доносились какие-то странные звуки — казалось, будто в домике кто-то прыгает по клавишам рояля. Это очень заинтересовало Алису; она подошла к двери домика и увидела медную табличку с надписью «Герцогиня».

— Неужели герцогини так играют на роялях? — удивилась Алиса. — Интересно, как они выглядят? Королей и королев я уже видела, а вот герцогини как-то не попадались!

Алисе очень хотелось зайти к Герцогине, но она боялась, что опоздает на бал. И вдруг она расслышала в домике детский плач: бедный ребёнок пытался перекричать рояль! Алиса открыла дверь и застыла на пороге как вкопанная.

Почти всю комнату занимал огромный рояль. По его клавишам носился галопом Чеширский Кот, аккомпанируя сам себе. На крышке рояля сидела Герцогиня и в такт музыке высоко подбрасывала Младенца, который извивался и визжал в полёте.

— Что вы делаете? — вскричала Алиса, пытаясь перекричать музыку и Младенца.

— Мы его укачиваем, — объяснил Кот, не прерывая своего дикого танца.

— Разве так укачивают? — воскликнула Алиса. — Он сейчас разорвётся от плача!

— Он не плачет, а хохочет, — возразила Герцогиня. И действительно, присмотревшись, Алиса поняла, что Младенец корчится от смеха: всё происходящее ему очень нравилось!

— Всё равно так не укачивают, — сказала Алиса, входя в домик и немного успокаиваясь. — Вы его только разыгрываете!

— Нахохочется — спать будет крепче! — отозвался Кот. — А мы сможем пойти с тобой на бал.

— Хватит меня укачивать, — заявил вдруг Младенец. — Расскажите лучше страшную историю!

— Кто же перед сном слушает страшные истории? — удивилась Алиса.

— Нестрашные истории слушать неинтересно, — ответил Младенец, устраиваясь поудобнее на руках у Герцогини.

— Смени музыку! — попросила Кота Герцогиня.

Кот перешел на левую часть клавиатуры, где были низкие ноты, и стал тяжело топать. Раздались такие жуткие звуки, что у Алисы мурашки по коже побежали. А когда Кот начал ещё и

завывать, она не выдержала и попросила:

— Хватит! Страшнее некуда!

— У тебя, наверное, нервы не в порядке, — заметил Младенец, с сожалением глядя на Алису. — Начинайте историю! — потребовал он у Герцогини.

— Во время ужасного шторма на корабль напали пираты... — начала Герцогиня.

— Начало неплохое, — похвалил Младенец. — А на этом корабле были тоже пираты?

— Одни пираты, — ответила Герцогиня.

— Вот это да! — восхищенно воскликнул Младенец. — Пираты напали на пиратов! Началась, конечно, страшная драка?

— Ещё бы! — с жаром подтвердила Герцогиня. — В этой драке шестьдесят три пирата потеряли левый глаз и пятьдесят семь — правый!

— А сколько всего пиратов было на обоих кораблях? — деловито осведомился Младенец.

— Сто, — ответила Герцогиня.

— Тогда это *слишком* страшная история! — вскричал Младенец так громко, что Герцогиня испугалась.

— Почему ты так решил? — спросила она, оправившись от испуга.

— Скажите сначала, все сто пиратов пострадали или не все? — поинтересовался Младенец.

— Все, — сокрушенно произнесла Герцогиня. — Драка была просто ужасная!

— А вначале у каждого пирата было по два глаза? — спросил Младенец.

— Да, — ответила Герцогиня.

— Тоже мне пираты! — пренебрежительно отозвался Младенец. — Так вот: получается, что после вашей драки двадцать пиратов остались без обоих глаз! Подумайте только — что будут делать двадцать слепых пиратов?! Пиратством они жить уже не смогут, а ничего больше они делать не умеют!

— А если бы пострадали не все пираты? — осторожно спросила Герцогиня.

— Было бы ещё страшнее! — воскликнул Младенец. — Если бы, например, пострадало только семьдесят пиратов, то пятьдесят из них стали бы слепыми! Это уже был бы не страх, а ужас какой-то!

Младенец так разошёлся, что соскочил с рук Герцогини и забегал по крышке рояля.

— А ты правильно подсчитал? — спросила Алиса у Младенца.

— Что же тут считать? — не переставая бегать, пожал плечами Младенец. — Надо всего-навсего перемножить два множества!

— Каких? — удивилась Алиса.

— Множество пиратов, потерявших левый глаз, надо умножить на множество пиратов, потерявших правый глаз! — ответил Младенец. — Вот и получится множество пиратов, потерявших оба глаза!

— Какой способный ребёнок! — подумала Алиса.

— Придётся вам сочинить другую историю, — серьёзно сказал Младенец, останавливаясь перед Герцогиней. — Страшную, но в меру!

— Идите на бал без меня, — вздохнув, обратилась Герцогиня к Коту и Алисе.

— Она придёт позже, — пообещал Младенец, — если, конечно, сочинит подходящую историю!

Кот мягко спрыгнул с клавиатуры, взял Алису под руку, и они вышли из домика.

— Как он так быстро перемножил два множества? — спросила Алиса Кота, когда они зашагали по дороге. — И почему получилось двадцать пиратов? Я умножила шестьдесят три на пятьдесят семь, но у меня получилось совсем не двадцать, а три тысячи пятьсот девяносто один!

— Ты умножила *число* одних пиратов на *число* других, — отозвался Кот. — Но умножать-то надо не числа, а *множества*!

— А как это делать? — поинтересовалась Алиса.

— Сложи число пиратов, которые потеряли левый глаз и число пиратов, которые потеряли правый глаз, — предложил Кот.

— Получится сто двадцать, — сказала Алиса. — Но это тоже слишком много: на двадцать больше, чем было всех пиратов!

— Это как раз и значит, что двадцать пиратов потеряли *оба* глаза, — сказал Кот. — Ведь когда ты складывала, то таких пиратов ты посчитала *дважды*!

— Ну конечно! — воскликнула Алиса. — Как раз эти пираты и входят в *оба* множества! Но я никогда бы не подумала, что при умножении множеств складываются числа...

— Не только складываются, но и *вычитаются*, — добавил Кот. — Жаль, что Герцогиня ошиблась!

— А почему вы решили, что она ошиблась? — спросила Алиса. — Может, она просто хотела, чтобы история получилась пострашнее?

— В этом и была её ошибка, — сказал Кот. — И теперь из-за этой ошибки она может не попасть на бал!

Алиса оглянулась, но домик уже скрылся из виду. А

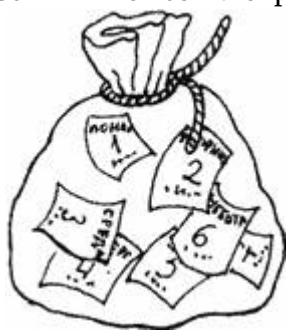
посмотрев снова вперёд, Алиса увидела море!

— Странно, — подумала она. — Какой же бал может быть на море?

О МНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВ

Невозможно даже представить себе, как мы могли бы жить в мире, где всё было бы совершенно непохожим одно на другое! Например, на небе сияли бы совершенно разные звёзды, настолько разные, что их нельзя было бы даже назвать одним словом «звёзды»...

Но, к счастью, в том мире, где мы живём, многие предметы чем-то похожи друг на друга, то есть имеют что-то *общее*. А когда мы замечаем, что предметы имеют что-то общее, мы — вольно или невольно — объединяем их в одно множество. Только благодаря этому мы можем *говорить* — ведь любое слово обозначает *множество* сходных предметов. Например, когда мы говорим «человек», мы имеем в виду одного из множества всех людей, когда говорим «зелёный» — предмет из множества всех зелёных предметов. Можно говорить о множестве дней недели и о множестве цветов радуги, множестве книг и о множестве друзей — множества окружают нас со всех сторон!



Немецкий математик Кантор, основатель теории множеств, писал: «Множество — это многое, мыслимое нами как единое»

Кантор жил в XIX веке, однако множествами учёные пользовались очень давно — с тех пор, как начали *классифицировать* предметы, то есть искать в них общее и различное. (Любая наука начинается именно с классификации!).

Один аргентинский писатель привёл замечательный пример, как *не надо* классифицировать. Он придумал «некую китайскую энциклопедию», в которой написано, что животные подразделяются на:

а) принадлежащих императору
б) бальзамированных
в) приручённых
г) молочных поросят
д) сирен

е) сказочных

ж) бродячих собак

з) включённых в настоящую классификацию

и) буйствующих, как в безумии

к) неисчислимых

л) нарисованных очень тонкой кисточкой из верблюжьей шерсти

м) прочих

н) только что разбивших кувшин

о) издалека похожих на мух

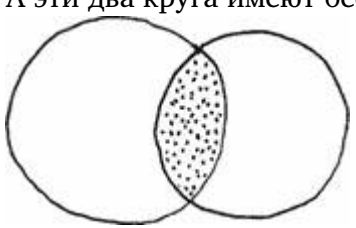
Эта удивительная «классификация» предоставляет нам прекрасную возможность порассуждать о множествах.

Прежде всего заметим, что каждая строка определяет какое-то множество животных — пусть странное, но множество!

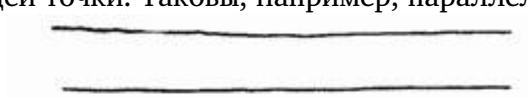
Некоторые из этих множеств не имеют общих элементов — например, множество молочных поросят и множество бродячих собак. А другие множества, наоборот, имеют общие элементы — скажем, множество бродячих собак и множество животных, буйствующих, как в безумии: ведь среди бродячих собак есть и бешеные. Если два множества не имеют общих элементов, говорят, что эти множества *не пересекаются*, а если общие элементы есть, то говорят, что множества *пересекаются*. Слово «пересечение» связано с геометрическими фигурами — если две фигуры пересекаются, у них есть *общие* точки (хотя бы одна!).

Например, эти две прямые пересекаются в одной точке:

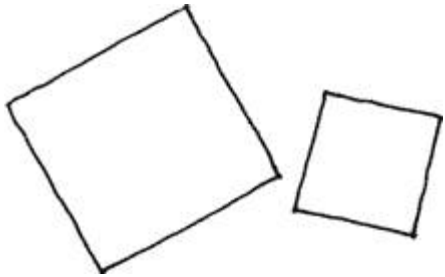
А эти два круга имеют бесконечно много общих точек:



Если же две фигуры не пересекаются, у них нет ни одной общей точки. Таковы, например, параллельные прямые:

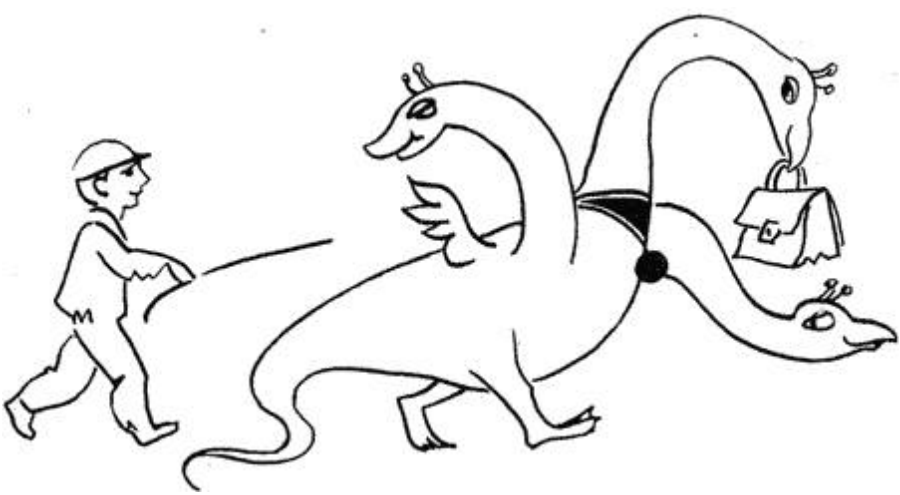


или эти два квадрата:



Множество общих элементов двух множеств называется *пересечением* этих множеств. Например, пересечение множеств всех девочек и множеств всех Алис — это девочки, которых зовут Алисами. Вы уже догадались, конечно, что *пересечение* множеств и *произведение* множеств, о котором беседовали Алиса и Гусеница — это одно и то же!

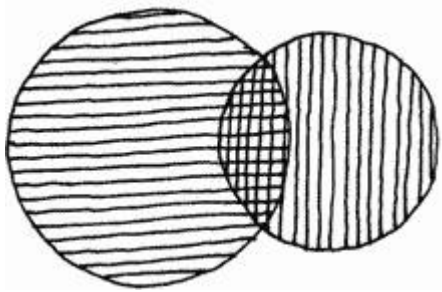
Сумма множеств тоже имеет второе название — «*объединение* множеств». Например, объединением множеств приручённых животных и сказочных животных будет множество, состоящее из животных, каждое из которых приручённое или сказочное (при этом оно может быть и приручённым и сказочным *одновременно*!). К такому множеству принадлежат, скажем, дрессированные собачки (приручённые животные), Белый Кролик с часами в жилетном кармане (сказочное животное), а также дрессированные драконы (приручённые и сказочные одновременно). А вот, например, динозавры, действительно жившие на Земле миллионы лет назад, к такому множеству не принадлежат (во-первых, приручить их тогда ещё было некому, а, во-вторых, хотя они и были похожи на драконов, они всё-таки были не сказочными, а настоящими!).



Множество можно задавать не только указанием общего свойства всех предметов, входящих в это множество (как мы это

делали до сих пор). Есть и другой способ: просто *перечислить* все элементы множества (помните множество, состоящее из Алисы и Гусеницы?).

Для того, чтобы легче было разбираться в том, как связаны различные множества, то есть каковы их объединение и пересечение, математик Эйлер (о нём мы уже писали) предложил обозначать множества кругами — эти круги называются обычно «кругами Эйлера». Например, для «слишком страшной истории», которую Герцогиня рассказывала Младенцу, круги Эйлера выглядят так:



Горизонтальными линиями здесь заштриховано «множество пиратов, потерявших левый глаз», вертикальными — «множество пиратов, потерявших правый глаз», а двойная штриховка обозначает пересечение этих множеств, то есть «множество пиратов, потерявших оба глаза».

Раз для множеств можно определить сложение и умножение (пусть даже и с несколько необычными свойствами), значит, можно построить и «алгебру множеств». Эта алгебра действительно была построена, и оказалось, что она в точности совпадает с той «алгеброй логики», которую построил Буль (с ним мы тоже уже знакомы)!

Совпадение это, конечно, не случайно: дело в том, что логика имеет дело с *высказываниями*, а каждое высказывание — это утверждение о каких-то *множествах*. Возьмём, например, такое высказывание: «Миша хочет шоколадку или заводную машину!». Здесь речь идёт о предмете, который принадлежит *сумме* множеств «шоколадки» и «заводные машины». Предположим, выбрана заводная машина.

— Какую машину Миша хочет?

— Красную *и* большую!

Тут уже говорится о *произведении* двух множеств: «красных заводных машин» и «больших заводных машин»!

Пока учёные ограничивались *конечными* множествами, то есть множествами, содержащими конечное число элементов, никаких неожиданностей не возникало: использование множеств позволяло только, как говорил Эйлер, «облегчать рассуждения».

А вот когда стали изучать бесконечные множества, начались чудеса! К ним мы сейчас и перейдём.

НЕБЫЛИЦА О КАНТОРЕ, В КОТОРОЙ ВСЁ — ПРАВДА!

Разные множества есть в этом мире:
Множество тапочек в нашей квартире,
Множество ветров, гуляющих в поле,
Множество тигров, живущих на воле,

Множество фильмов, в которых стреляют,
Множество звёзд, что ночами мерцают,
Множество тех, кто не спит до рассвета,
Множество тех, кто не шлёт нам привета,

Множество тех, кто хотел бы подраться,
Множество тех, кто умеет смеяться.
Множество тех, чей приятель — блондин...
Есть множество множеств,
Но Кантор — один!

ШАХМАТНЫЙ БАЛ

Алиса с Чеширским Котом вышли к берегу моря и остановились перед обрывом. Далеко внизу пенился прибой.

— Как же мы попадём отсюда на бал? — удивлённо спросила Алиса и посмотрела на Кота.

Кот не ответил — он вглядывался вдаль и, казалось, чего-то ждал.

— За нами, наверное, должен прийти корабль, — подумала Алиса. — А, может быть, бал будет на самом корабле?

Она посмотрела туда, куда смотрел Кот, но не увидела ничего, кроме линии горизонта.

— Эта линия очень похожа на прямую, — сказала Алиса, показывая на линию горизонта.

— Ты уверена? — отозвался Кот.

— Ничего *прямее* даже представить невозможно! — воскликнула Алиса.

— Тогда посмотри *кругом*, — предложил Кот.

Алиса повела взглядом вдоль линии горизонта и с удивлением обнаружила, что море окружает их со всех сторон — они с Котом стояли теперь на одинокой скале посреди моря!

— Ну что? — широко улыбаясь, спросил Кот. — Ты по-прежнему считаешь, что линия горизонта похожа на прямую?

Алиса ещё раз обвела взглядом всю линию горизонта — для этого ей пришлось снова повернуться *кругом*!

— Нет, — признала она. — Линия горизонта *возвращается* в ту же точку, а прямая — не возвращается!

— Значит, линия горизонта — не прямая, — заключил Кот и, видя удивление Алисы, добавил: — Это окружность.

— Окружность рисуют циркулем, — вспомнила Алиса (она успела прочесть об этом в учебнике математики). — Но где же здесь циркуль?

— Циркуль — это твой взгляд, — пояснил Кот. — Все точки окружности находятся на одном и том же расстоянии от её центра — потому её и рисуют циркулем! А все точки линии горизонта находятся на одном и том же расстоянии *от нас*.

— Действительно, — согласилась Алиса, еще раз поворачиваясь вокруг себя и глядя на линию горизонта. — Скажите, мы ждём, когда за нами придёт корабль?

— Нет, — ответил Кот. — Мы ждём, когда уйдёт линия горизонта.

— Что?! — поразилась Алиса. — Куда же она может уйти?

— В бесконечность, — отозвался Кот. — Наша планета начнёт

сейчас увеличиваться, а чем больше планета, тем дальше линия горизонта!

— Но зачем планете увеличиваться? — удивилась Алиса. — По-моему, она и так уже достаточно большая — наверное, не меньше Земли!

— Даже если бы она была в миллион раз больше Земли, на ней не смогло бы уместиться бесконечное множество танцующих, — ответил Кот. — Для этого планета должна стать бесконечно большой!

— *Бесконечное множество танцующих?* — переспросила Алиса. — Неужели будет такой большой бал?

— Уверяю тебя, такого бала ты никогда ещё не видела! — воскликнул Кот и вдруг показал лапой вдаль: — Смотри!

Алиса внимательно посмотрела на линию горизонта и увидела, что линия действительно начала удаляться! Она уходила всё дальше и дальше и, наконец, ушла в невообразимую даль.

Сразу же вслед за этим налетели резкие порывы ветра, и всё море подёрнулось пятнами ряби. Кое-где появились даже барашки, причём барашки были не только белыми, но и чёрными!

Вдруг Алиса заметила, что пятна на море начали превращаться в белые и чёрные квадраты, а барашки — в белые и чёрные шахматные фигуры! Она перевела удивлённый взгляд на Кота и... почувствовала, будто скала под нею качнулась! Алиса невольно схватилась за Кота.

— Не бойся, — улыбнулся Кот. — Просто мы летим!

И действительно, Алиса с Котом находились теперь в большой корзине, от которой уходили вверх туго натянутые канаты. Подняв голову, Алиса увидела над собою большой воздушный шар!

Она посмотрела вниз — никакой скалы не было и в помине: под ними расстилалась бескрайняя шахматная доска, а на ней, насколько хватал глаз, стояли шахматные фигуры.

Алисе захотелось рассмотреть фигуры получше.

— Жаль, что у нас нет подзорной... — начала думать она, и Кот протянул ей длинную подзорную трубу.

Направив трубу вниз, Алиса увидела много интересного.

Прежде всего, фигуры были *живыми*! Они стояли небольшими группами одного цвета: король, королева и восемь пешек-пажей в каждой группе. На королях и королевах были длинные мантии, которые развевались при каждом движении, а на пажах — короткие плащи, легкие, как ветер.

Присмотревшись, Алиса увидела, что на одежде каждой фигуры красиво вышито число: на белых фигурах цифры были

чёрными, а на чёрных — белыми.

В одной из групп белых фигур Алиса узнала своего знакомого Белого Короля; на его мантии и на мантии стоящей рядом с ним Белой Королевы были вышиты большие чёрные единицы. Почувствовав на себе взгляд Алисы, Король поднял голову и помахал Алисе рукой. Она ответила ему, и вдруг белые пешки-пажи тоже стали её приветствовать (Алисе, конечно, трудно было узнать в этих изящных пажах своих знакомых-поварят, но они её узнали!). На белых плащах пажей были вышиты числа от одного до восьми.

Рядом с этой группой белых фигур стояла группа чёрных фигур. Алиса заметила, что на мантиях Чёрного Короля и Чёрной Королевы вышиты белые единицы, а на плащах пажей — тоже числа от одного до восьми.

— Что означают числа на одежде фигур? — спросила Алиса.

— Каждая фигура имеет свой номер, — пояснил Кот.

— А здесь есть фигуры с *любыми* номерами? — снова спросила Алиса, пытаясь окинуть взглядом безбрежное море фигур.

— С любыми, — подтвердил Кот. — Какое натуральное число ни возьми, здесь есть один белый король с таким номером, одна белая королева и одна белая пешка. И чёрные фигуры пронумерованы точно так же.

— Но зачем нужны эти номера? — спросила Алиса, но в этот момент заиграла музыка.

Первым танцем был менуэт — «король танцев» и «танец королей». Белые короли вели чёрных королев, а чёрные короли — белых королев. Это было великолепное зрелище: сверху казалось, будто по всей шахматной доске под медленную музыку двигаются чёрно-белые волны.

— Обрати внимание на важное правило танца, — сказал Кот, любуясь танцующими парами, — каждый король ведёт королеву *с точно таким же номером, как у него самого*.

— Действительно, — подтвердила Алиса, внимательно посмотрев в подзорную трубу. — Но разве это так важно?

— Очень важно, — отозвался Кот. — Ведь только благодаря этому правилу можно быть уверенным, что *каждый* король пригласил королеву и *каждая* королева приглашена королём.

— Но это же и так видно! — воскликнула Алиса.

— Увидеть *бесконечное* число фигур невозможно, — возразил Кот. — И если бы не это правило — одинаковые числа в каждой паре, — то многие королевы могли бы остаться неприглашёнными!

— А *все* короли при этом танцевали бы? — недоверчиво

спросила Алиса.

— Все до единого, — ответил Кот.

— Не может быть! — воскликнула Алиса.

— Ещё как может! — отозвался Кот. — Даже бесконечно много королев могли бы остаться неприглашёнными...

Алиса хотела возразить Коту, но в этот момент музыка смолкла, и Кот сказал:

— Следующие два танца с королевами будут танцевать пажи.

— А как же короли? — удивилась Алиса.

— Королям надо обсудить кое-какие дела друг с другом, — пояснил Кот.

— Я вижу, короли занимаются королевскими делами даже на балах, — заметила Алиса.

Фигуры на шахматной доске быстро перестроились, и грянул какой-то веселый танец. Чёрные пешки как по команде окружили белых королев, а белые — чёрных, и через секунду вокруг каждой королевы, взявшись за руки, кружились восемь пешек. Сверху казалось, будто под стремительную музыку вскипает океан!

Алиса тоже невольно начала приплясывать, и Кот тут же последовал её примеру. Маленькая корзина воздушного шара закачалась под музыку из стороны в сторону.

— Неужели короли могут сейчас что-то обсуждать? — со смехом спросила Алиса.

— Могут, — ответил Кот, тоже смеясь. — На то они и короли!

И вдруг быстрый танец сменился красивым медленным вальсом.

— Как же теперь пажи будут танцевать с королевами? — удивилась Алиса. — Вальс ведь танцуют *парами*, а на каждую королеву приходится по *восемь* пажей!

— Сейчас увидишь, — отозвался Кот.

Фигуры внизу снова перестроились, и Алиса увидела, что пажи и королевы танцуют *парами*! Белые пажи вели чёрных королев, а чёрные — белых: казалось, вся шахматная доска внизу кружится в ритме вальса, и у Алисы закружилась голова.

— Как это получилось? — тряхнув головой, с недоумением спросила Алиса.

— Присмотрись к номерам, и ты всё поймёшь, — посоветовал Кот.

Алиса взяла подзорную трубу и увидела, что номер каждой королевы совпадает с номером той пешки, которая с ней танцует!

— Я поняла! — воскликнула Алиса. — Раз Королевы и пешки есть со *всеми* номерами, то для *любой* пешки нашлась королева с *таким же* номером! И ни одна пешка не осталась в стороне. Действительно, очень удобно, что на этом балу у всех фигур есть

номера!

— На *таком* балу это просто необходимо! — отозвался Кот. — Но смотри: сейчас будут танцевать *все* фигуры!

— Неужели каждый король будет танцевать с королевой и пажом? — удивилась Алиса. — Странный какой-то танец втроём...

Вальс сменился котильоном, и, к удивлению Алисы, оказалось, что все снова танцуют парами! Взяв подзорную трубу, Алиса увидела, что королевы с чётными номерами танцуют с пажами, а королевы с нечётными номерами — с королями. И поэтому королев хватило и пажам и королям!

— Всё это очень похоже на фокусы! — воскликнула Алиса.

— Никаких фокусов! — торжественно заявил Кот. — Всё строго по правилам. Просто ты ещё не привыкла к бесконечным множествам... Приглашаю тебя на танец!

— Как же мы будем здесь танцевать? — удивилась Алиса, показывая на маленькую корзину воздушного шара.

Вместо ответа Кот потянул какую-то верёвочку, и шар начал плавно снижаться.

Через несколько минут корзина коснулась шахматного паркета. Кот привязал её к серебряному крюку, который оказался как раз рядом с ними, и Алиса под руку с Чеширским Котом ступила на паркет.

Алисе никогда в жизни не приходилось танцевать котильон, но оказалось, что она прекрасно знает все фигуры. А Чеширский Кот танцевал с такой поразительной грацией, будто всю жизнь занимался только бальными танцами!

Скоро Алиса заметила, что вокруг них начали появляться её знакомые.

Кубарем катался под музыку Шалтай-Болтай: он был цел-целёхонек!

Лев и Единорог исполняли танец, похожий чем-то на смертный бой за корону.

Белый и Чёрный Рыцари гарцевали на белой и чёрной лошадях; при этом и Рыцари, и лошади вежливо раскланивались друг с другом.

Шляпник и Мартовский Заяц, пританцовывая, пили чай. Они держали большой поднос, на котором крепко спал Соня — он сидел верхом на чайнике и качал головой точно в такт музыке.

Грифон танцевал с Черепахой Будто; она танцевала в три раза медленнее, чем Грифон, но оба они танцевали с большим удовольствием.

Братья Ха-Ха и Ах-Ах весело отплясывали в своих шляпах для ног — при этом братцы так высоко подбрасывали ноги, что их шляпы для ног оказывались выше, чем настоящие шляпы!

Король Червей галантно вёл Королеву Червей — она была всё так же сурова, но здесь её никто не боялся.

Валет Червей танцевал... угадайте, с кем? С Герцогиней!

— Неужели Младенец всё-таки заснул? — с улыбкой спросила Алиса Герцогиню.

Вместо ответа Герцогиня показала глазами на воздушный шар: в корзине сидел Младенец и с интересом смотрел по сторонам.

Вдруг Алиса заметила, что канат, которым корзина привязана к серебряному крюку, вот-вот развяжется!

— Младенца сейчас унесёт одного! — мелькнуло в голове у Алисы.

Она бросилась к воздушному шару, но не успела: узел развязался совсем, и корзина уже оторвалась от паркета. В последний момент Алиса прыгнула в корзину.

— Вдвоём нам будет веселей! — обрадовался Младенец. Шар начал набирать высоту. Алиса глянула вниз: все подняли головы и смотрели вслед улетающему воздушному шару. Алиса помахала рукой, и в ответ внизу закачался лес рук.

— До свидания! — крикнула Алиса, и руки замахали чаще. Она погладила Младенца по голове, и он почему-то замурлыкал; волосы у Младенца оказались удивительно пушистыми.

Чем выше поднималась Алиса, тем ярче сверкали короны на головах королей и королев. Наконец, блеск бесконечного множества корон стал нестерпимым, Алиса зажмурилась и... проснулась!

Она сидела на диване, свернувшись калачиком. Прямо в лицо ей светили из окна лучи заходящего солнца, на коленях лежал раскрытый учебник математики, а пальцы Алисы погрузились в тёплую шерсть Дины — кошка спала рядом с Алисой и тихонько мурлыкала.

— Ты даже не представляешь, какой мне приснился удивительный сон! — сказала Алиса.

Кошка приоткрыла глаза и посмотрела на Алису таким взглядом, что Алиса поняла: Дина всё знает, но просто не считает нужным об этом рассказывать...

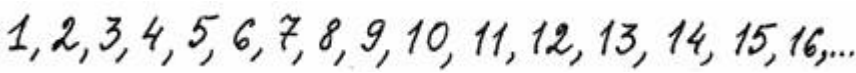
Алиса перевернула несколько страниц учебника, и ей показалось, будто числа и фигуры подмигивают ей, как старые знакомые.

— Я должна рассказать свой сон мистеру Доджсону, — подумала Алиса. — В моём сне была и сказка и математика — и в том и в другом мистер Доджсон разбирается лучше всех!

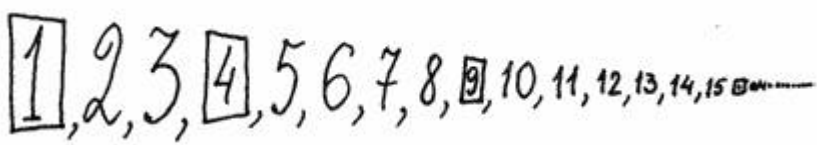
МОЖЕТ ЛИ ЧАСТЬ РАВНЯТЬСЯ ЦЕЛОМУ?

Любой нормальный человек скажет, что не может, потому что часть *меньше* целого!

Однако Галилей не был нормальным человеком — он был великим учёным. Поэтому он сомневался во всём и подвергал проверке всё, что мог проверить. Возьмём, сказал он, бесконечный ряд натуральных чисел:

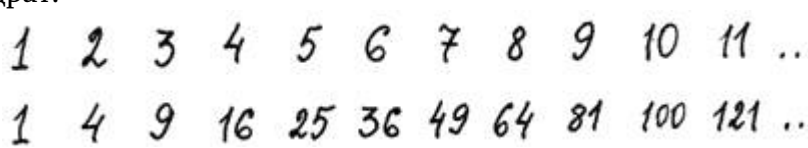


В этом ряду *некоторые* числа являются *квадратами*, например, 1, 4, 9, 16. Однако чем дальше движемся мы вдоль натурального ряда, тем реже будут встречаться квадраты: среди первых ста натуральных чисел мы найдём десять квадратов (одна десятая часть от ста), а среди первого миллиона натуральных чисел — только тысячу квадратов (это всего одна тысячная часть от миллиона). В путешествии по натуральному ряду нам встретятся участки любой длины, состоящие только из чисел — «неквадратов»: например, после триллиона идут подряд два миллиона чисел, каждое из которых не является квадратом! Зато стоящие рядом квадраты не попадутся нам никогда!



А теперь, зная всё это, скажите — чего больше: *всех* натуральных чисел или *только квадратов*?

Ответ, казалось бы, не вызывает сомнений: ведь числа-квадраты — это только малая *часть* всех чисел! Однако давайте, следуя Галилею, напишем под каждым натуральным числом его квадрат:



Этот ряд мы можем продолжать сколько угодно: ведь у *любого* натурального числа есть квадрат. Но это как раз и означает, что квадратов *столько же*, сколько всех натуральных чисел! А значит, *часть действительно равна целому*!

Таково поразительное свойство бесконечных множеств, открытое Галилеем. Этим свойством обладают, конечно, *только*

бесконечные множества! Потому оно и кажется нам таким необычным — ведь в жизни мы не встречаемся и никогда не встретимся с бесконечными множествами.

Бесконечность — это гениальная выдумка математиков, и единственное требование к этой выдумке состоит в том, чтобы в ней не было «обмана», то есть противоречий. Однако для того, чтобы выполнить это требование, приходится отказаться от многого из того, к чему мы привыкли, имея дело с конечными множествами. И прежде всего — от аксиомы, что часть *всегда* меньше целого!

Чтобы вам легче было отказываться от «конечных» привычек, приведём ещё один пример. Оставим в ряду натуральных чисел только каждое десятое число:

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, ...

Заметьте, что «девять десятых» всех натуральных чисел мы при этом отбросили! А теперь сделаем «фокус» — зачеркнём у каждого из оставленных чисел нуль в конце. Что мы получим? Конечно, снова *весь* натуральный ряд — он, оказывается, ничуть не уменьшился от того, что мы оставили только «одну десятую» его часть!

Если хотите, можете оставить всего лишь «одну миллионную» часть натурального ряда, то есть числа:

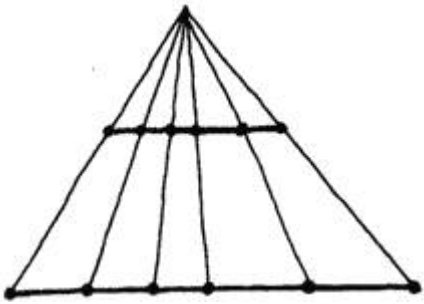
1 000 000, 2 000 000, 3 000 000, 4 000 000, ...

Зачеркните теперь у всех чисел последние шесть нулей, и... «одна миллионная» часть тут же превратится в «целый» натуральный ряд! Он поистине «возрождается из пепла», как сказочная птица Феникс. Теперь вам, наверное, стали понятней и те правила грандиозного «шахматного бала», который наблюдали Алиса с Чеширским Котом.

Теорию бесконечных множеств создали в XIX веке чешский математик Больцано и немецкий математик Кантор. Они догадались, что сравнивать бесконечные множества можно единственным способом: составляя из элементов этих множеств *пары* (помните танцующие пары на «шахматном балу»?). И если можно составить пары так, что любому элементу первого множества найдется «компаньон» среди элементов второго множества, а любому элементу второго — «компаньон» среди элементов первого множества, причём каждый элемент входит в одну пару, то следует считать, что оба множества содержат элементов *поровну*.

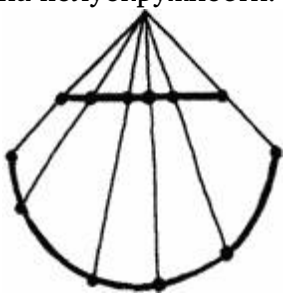
Было строго доказано, что такой способ сравнения множеств не приводит к противоречиям, хотя при этом и возникают «чудеса», подобные описанным выше. Более того, появляются и новые «чудеса»: например, оказывается, что отрезки разной

длины содержат одинаковое «число» точек! Вот как это доказывается:

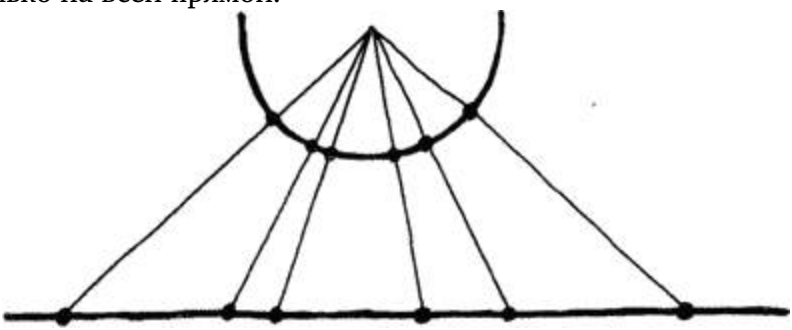


Из этого рисунка видно, как можно составлять «пары» из точек двух отрезков — короткого и длинного. При этом, действительно, *все* точки обоих отрезков «собираются в пары»!

Можно доказать и большее — что на любом *отрезке* столько же точек, сколько на всей *бесконечной* прямой! Мы это сделаем в два приёма. Сначала докажем, что на отрезке столько же точек, как на полуокружности:

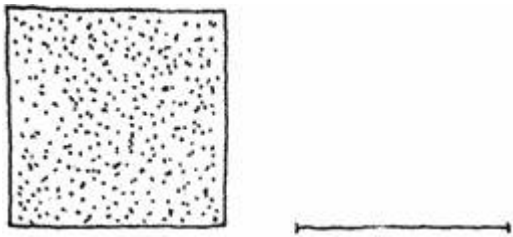


А теперь докажем, что на полуокружности столько же точек, сколько на всей прямой:



(может быть, некоторые из вас заметили, что для двух крайних точек полуокружности не нашлось точек-«компаньонов» среди точек прямой, но эта проблема легко решается: можно было, например, с самого начала взять отрезок без крайних точек).

А как вы думаете, где больше точек — во *всём* квадрате (включая его «внутренность») или только *на одной его стороне*?



Сам Кантор, «отец» теории бесконечных множеств, был уверен, что в квадрате точек больше. На поиски доказательства этого «очевидного» факта у него ушло три года, и в конце концов он доказал, что... точек в квадрате *столько же*, сколько на одной его стороне! Поражённый этим выводом, Кантор писал другому математику: «Я вижу это, но не верю этому». И тем не менее доказательство было безупречным (мы его здесь не приводим — оно не очень простое!).

Может быть, вы решили уже, что *все* бесконечные множества «одинаковы», то есть содержат одинаковое «число» элементов? Оказывается, и это не так: тот же Кантор показал, что существует бесконечно много *разных* бесконечных множеств, причем одни из них в «бесконечное число раз» больше других! Например, точек на отрезке «больше», чем всех натуральных чисел. Однако точный смысл слова «больше» для бесконечных множеств не так просто объяснить, да и, кроме того, мы побаиваемся, что у вас и так уже закружилась голова от «бесконечных чудес» с бесконечными множествами!

А если она еще не совсем закружилась, то вы, наверное, задались вопросом: *зачем* нужны бесконечные множества? Может, это только блестящая игра ума, которую математики придумали себе для развлечения?

Дело в том, что *вся* математика пронизана идеей бесконечности: ведь почти в любой теореме говорится о бесконечном множестве каких-то предметов, например, чисел или фигур (помните теорему о сумме углов *любого* треугольника?). И вот для того, чтобы математические доказательства были *строгими*, математикам и пришлось овладеть бесконечностью — иного способа доказывать, что в их великой «выдумке» нет «обмана», просто не существует!

Напомним на прощанье слова великих математиков двадцатого века.

Пуанкаре: «Если кто-нибудь захочет кратким и выразительным словом определить само существо математики, тот должен сказать, что математика — это наука о бесконечности».

Гильберт: «Ни одна проблема не волновала так глубоко человеческую душу, как проблема бесконечности».

НЕБЫЛИЦА О ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЕ, ЖИВУЩЕМ В БЕСКОНЕЧНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Галилей глядит на небо
В самодельный телескоп,
Галилей от удивленья
Морщит свой высокий лоб:

Там, где Млечный путь проходит,
Видит ясно наш герой
Вместо чуть заметной дымки
Бесконечный звёздный рой!

— Как огромно мирозданье! —
Восклицает Галилей,
И его воображенье
Разгорается сильней:

Может, где-то есть планета,
Очень сходная с Землёй,
Может, там есть тоже море,
И шумит морской прибой?

Галилей глядит на небо,
И фантазия его
Обнимает мирозданье...
Но не знает он того,

Что сейчас на той планете
Кто-то тоже морщит лоб
И разглядывает небо
В самодельный телескоп,

И *его* воображенье
Тоже всё смелей, смелей...
И он тоже носит имя —
Галилео Галилей!

Конец

Когда через неделю мистер Доджсон снова пригласил Алису и её сестёр на лодочную прогулку, Алиса рассказала свой удивительный сон.

— Я всегда считал, что даже спать над страницами учебника математики и то интересно, — произнёс мистер Доджсон, когда Алиса закончила рассказ. — К тому же снятся вещие сны, — добавил он.

— Почему вещие? — спросила Ларина, пытаясь понять: шутит мистер Доджсон или говорит серьёзно.

— Добрую половину героев нового сна Алисы я ещё не придумал, — объяснил мистер Доджсон.

— Я это заметила, — сказала Алиса. — Например, шахматных фигур в Стране Чудес не было...

— Они будут в следующей сказке, — пообещал мистер Доджсон. — И они, и Шалтай-Болтай, и братья-близнецы... А что касается математики, то кое-что из того, что тебе приснилось, ещё не придумано математиками...

— Они обязательно это придумают! — заверила Эдит. — Сон-то был вещий!

Все дружно рассмеялись.

А ведь Эдит оказалась права!

Да, мы чуть не забыли о самом интересном: вечером того дня, когда Алисе приснился её удивительный сон, она случайно сунула руку в карман, и там оказался... карандаш, подаренный ей Чеширским Котом в межзвёздном пространстве!

Но об этом Алиса никому не рассказала.

notes

*

Перевод Ц. Бану

*

Английская старинная песенка-загадка. Перевод С.Я. Маршака.

*

Старинная английская песенка (перевод Д.Г. Орловской). Эта песенка появилась в семнадцатом веке, когда Англия и Шотландия объединились и был принят новый британский герб, на котором английский лев и шотландский единорог поддерживают королевский щит (они его поддерживают до сих пор!).

*

В Англии шахматный конь называется «рыцарем».

*

Некоторые думают, что из Черепахи Будто готовят «будто черепаховый суп», но Алиса знала, что на самом деле такой суп готовят из телятины, а Черепаху Будто никто не обижает!